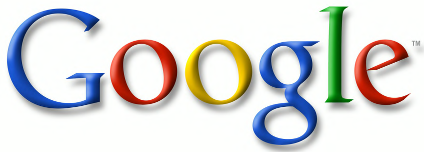


EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBRI PRIORES SEX,

ITEM

UNDECIMUS & DUODECIMUS.

Ex Versione Latina

FEDERICI COMMANDINI.

QUIBUS ACCEDUNT.

Trigonometriæ Planæ & Sphæricæ Elementa.

Item Tractatus de Natura & Arithmetica Logarithmorum.

In usum Juventutis Academicæ.



OXONIÆ,

E THEATRO SHELDONIANO, MDCCXXXI.

Impensis *Ric. Clements* Bibliop. *Oxon.*

Prostat apud *J. Knapton* & *C. Rivington* Bibliop. in Cœmiterio D. Pauli *Lond.*

Imprimatur,

BER. GARDINER

Vic. Can. *OXON.*

March 25. 1715.

PRÆFATIO.

POST tot nova *Geometriæ Elementa, non ita pridem in lucem emissa, est fortasse quod miretur Tyro Mathematicus, annosa hæc, & (ut quibusdam videntur) obsoleta* Euclidis στοιχεῖα *è prelo denuo prodire: præsertim cum non pauca in illis vitia detexisse sibi visi sint, qui Geometriam Elementarem novâ quadam methodo excolendam proponunt. Hi enim Lyncei Philosophi* Euclidis *Definitiones parum perspicuas, demonstrationes vix evidentes, res omnes malo ordine dispositas, aliasque mendas innumeras, per omnem antiquitatem ad sua usque tempora latentes, se invenisse jactant.*

At tantorum virorum pace, audacter assero, Euclidem ab iis immerito reprehensum esse, ejusque Definitiones distinctas & claras, è primis & simplicioribus principiis petitas esse, & conceptibus nostris faciliores; demonstrationes Elegantes perspicuas & concinnas; ratiocinandi vim adeo evedentem & nervosam, ut facile inducar credere obscuritatem istam à sciolis illis toties insimulatam, confusis potius & perplexis eorum ideis, quam demonstrationibus ipsis imputandum esse. Et utcunque nonnulli quærantur de malâ rerum dispositione, & iniquo ordine, quem tenet Euclides; aliam tamen methodum magis idoneam, & discentibus faciliorem inter omnia hoc genus scripta invenio nullam.

Non meum est hîc loci hypercriticis Horum captiunculis sigillatim respondere: sed in his Elementis vel mediocriter versato, statim patebit, Calumniatores hos suam potius oscitantiam monstrare, quam veros in nostro authore lapsus arguere; imo ne hoc quidem dicere vereor, quod vix, & ne vix quidem unum, aut alterum è tot novis systematibus inveniri potest, in quibus plures non sunt labes, imo fœdiores paralogismi, quam in Euclidem vel fingere potuerunt.

Post tot infelices in Geometriâ reformandâ conatus, quidam non infimi Geometræ Elementa de novo construere non ausi, ipsum Euclidem omnibus aliis Elementorum Scriptoribus merito prætulerunt, eique edendo suas curas impenderunt; hi tamen ipsi nescio quibus opinionibus ducti, alias propositiones prorsus omittunt, aliarumque demonstrationes in pejus mutant. Inter illos eminent Tacquetus & Deschalles, quorum utrique malo quodam fato contigit, ut elegantes quasdam & in Elementis optimo jure ponendas propositiones quasi ineptas & inutiles rejecerint, quales sunt propositiones 27, 28, 29. libri sexti, cum aliis nonnullis quarum usus fortasse illos latebat. Insuper quandocunque ipsas Euclidis demonstrationes deserunt, multum in argumentando peccant, & à concinnitate Veterum recedunt.

In libro quinto demonstrationes Euclidis in totum repudierunt, & Proportionis definitionem aliis terminis conceptam attulerunt; at quæ unam tantum è duabus proportionalium speciebus comprehendit, & quantitatibus commensurabilibus solummodo competit: nihilominus suas, quæ sunt de proportione, demonstrationes omni quantitati tam incommensurabili quam commensurabili in sequentibus libris applicant.

plicant. Hunc tam turpem lapsum nec Logici nec Geometræ facile condonassent, nisi hi authores in aliis suis scriptis de Scientiis Mathematicis benè meruissent. Hoc quidem commune est iis vitium cum omnibus hodiernis Elementorum Scriptoribus, qui in eundem impingunt scopulum, & ut suam in hac materia ostentent peritiam, authorem nostrum in re minime culpandâ imo laudandâ reprehendunt; Quantitatum proportionalium definitionem intelligo: in quâ intellectu facilem proportionalium proprietatem exponit, quæ quantitatibus omnibus tam incommensurabilibus quam commensurabilibus æque convenit, & à quâ cæteræ omnes proportionalium proprietates facile consequuntur.

Hujus proprietatis demonstrationem in Euclide desiderant Egregii hi Geometræ, atque defectum demonstratione suâ supplendum suscipiunt. Hic iterum contemplari licet insignem eorum in Logicâ peritiam, qui definitionis nominis demonstrationem expectant: talis enim est hæc Euclidis definitio; qui illas quantitates proportionales vocat, quæ conditiones in definitione suâ allatas obtinent. Quidni primo Elementorum authori licebat, quælibet nomina quantitatibus hæc requisita habentibus, arbitrio suo affigere? Licebat proculdubio; suo igitur utitur jure, & eas proportionales vocat.

Sed operæ pretium erit, methodum, quâ hanc proprietatem demonstrare conantur, perpendere. Affectionem quandam uni tantum proportionalium generi, viz. commensurabilium, congruentem assumunt; & exinde multis ambagibus longâque conclusionum serie universalem, quam Euclides posuit, proportionalium proprietatem deducunt; quod certe tam methodo

quam

quam argumentationis regulis satis alienum esse videtur. At longe rectius fecissent, si proprietatem universalem ab Euclide assignatam primo posuissent, & exinde particularem illam & uni tantum proportionalium speciei congruentem deduxissent. Quoniam vero hanc respuerunt methodum, talem demonstrationem ad definitiones libri quinti attexere libuit. Qui Euclidem ulterius defensum videre cupiunt, consulant eruditas & summo judicio conscriptas Lectiones Mathematicas Cl. Barovii an. 1666.

Cum vero tanti Geometræ incidit mentio, præterire non possum Elementa ab eo edita, in quibus plerumque ipsius Euclidis constructiones & demonstrationes retinet, ne unâ quidem omissa propositione. Hinc oritur major in demonstrando vis, pulchrior construendi methodus, & ubique Veterum Geometrarum genius clarius elucet, quam in libris istius generis fieri solet. Plura præterea Corollaria & Scholia adjecit, non modo breviori sequentium demonstrationi inservientia, verum etiam aliis in rebus perutilia.

Nihilominus, demonstrationes ejus eâ brevitate laborant, tot symbolis notisque implicantur, ut in Geometriâ parum versato difficiles & obscuræ fiant. Multæ propositiones quæ ipsum Euclidem legenti perspicuæ viderentur, Algebraicâ hac demonstrandi methodo tyronibus nodosæ & vix intelligibiles redduntur; qualis est V. G. 13. *primi Elementi. Demonstrationum, quas in Elemento secundo attulit, difficilis admodum tyronibus est intelligentia; rectius multo Euclides ipse earum evidentiam (ut in re Geometricâ fieri debet) à figurarum contemplatione petit. Scientiarum omnium Elementa simplicissimâ*

methodo

methodo tradenda sunt, nec symbolis nec notis nec obscuris principiis aliunde petitis involvenda.

Ut Elementa Barovii nimiâ brevitate, sic ea, quæ à Clavio traduntur, molestâ prolixitate peccant. Scholiis enim Commentariisque abundat nimis & luxuriat. Vix equidem arbitror Euclidem tam obscurum esse, ut tantâ farraigne notarum indigeat; nec dubito quin tyrones omnes Euclidem ipsum omnibus suis Commentatoribus faciliorem inventuri sint. In demonstrationibus Geometricis ut nimia brevitas tenebras parit, sic nimia verbositas plus tædii & confusionis quam lucis affert.

Hisce præcipue inductus rationibus, prima sex Euclidis Elementa cum undecimo & duodecimo, ex versione Frederici Commandini *in usum Juventutis Celeberrimæ hujus Academiæ per se edenda curavi; à cæteris abstinui, tum quia hæc, quæ jam damus, ad alias plerasque Matheseos partes, quæ nunc vulgo traduntur, intelligendas, sufficiant, tum etiam quia omnia Euclidis opera, Græce & Latine nitidissimis Characteribus adornata summaquo cura & fide emendata nuper è prælo Academico prodiere.*

Porro in gratiam eorum, qui Geometriam Elementarem ad Praxes vitæ commodis inservientes applicare desiderant, Trigonometriæ Planæ & Sphæricæ compendium adjunxi, cujus Artis ope, magnitudines Geometricæ mensurantur, ipsarumque dimensiones numeris subjiciuntur.

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER PRIMUS.

DEFINITIONES.

I.

PUnctum est, cujus nulla est pars, vel quod magnitudinem nullam habet.

II.

Linea vero est longitudo latitudinis expers.

III.

Lineæ termini sunt puncta.

IV.

Recta linea est, quæ ex æquo suis interjicitur punctis.

V.

Superficies est id, quod longitudinem, & latitudinem tantum habet.

VI.

Superficiei termini sunt lineæ.

VII.

Plana superficies est quæ ex æquo suis interjicitur lineis.

VIII.

Planus angulus est duarum linearum in plano sese contingentium, & non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio.

IX.

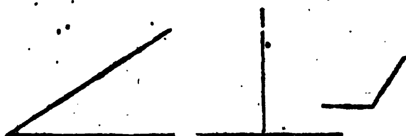
Quando autem quæ angulum continent rectæ lineæ fuerint, rectilineus angulus appellatur.

X.

Cum vero recta linea super rectâ lineâ insistens, eos, qui deinceps sunt angulos, æquales inter se fecerit, rectus est uterque æqualium angulorum: & quæ insistit recta linea perpendicularis vocatur ad eam, cui insistit.

XI.

Obtusus angulus est, qui major est recto.



XII.

Acutus autem, qui recto est minor.

XIII.

Terminus est, quod alicujus extremum est.

XIV.

Figura est, quæ aliquo, vel aliquibus terminis continetur.

XV.

Circulus est figura plana, una linea contenta, quæ circumferentia appellatur: ad quam ab uno puncto intra figuram existente omnes rectæ lineæ pertingentes sunt æquales.

XVI.

Hoc autem punctum centrum circuli nuncupatur.

XVII.

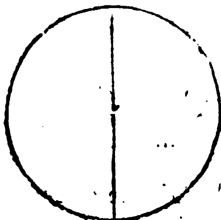
Diameter circuli est recta quædam linea per centrum ducta, & ex utraque parte à circumferentia circuli terminata, quæ quidem, & bifariam circulum secat.

XVIII.

Semicirculus est figura, quæ continetur diametro, & ea quæ ex ipsa circuli circumferentia intercipitur.

XIX.

Segmentum circuli est figura, quæ recta linea, & circuli circumferentia continetur.



XX.

XX.

Rectilineæ figuræ ſunt, quæ rectis continentur lineis.

XXI.

Trilateræ quidem, quæ tribus.

XXII.

Quadrilateræ, quæ quatuor.

XXIII.

Multilateræ vero, quæ pluribus, quam quatuor rectis lineis comprehenduntur.

XXIV.

Trilaterarum figurarum æquilaterum eſt triangulum, quod tria latera habet æqualia.

XXV.

Iſoſceles, ſive æquicrure, quod duo tantum æqualia latera habet.

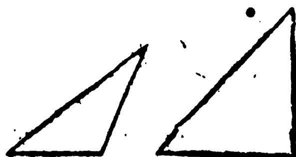


XXVI.

Scalenum vero eſt, quod tria inæqualia habet latera.

XXVII.

Ad hæc, trilaterarum figurarum, rectangulum quidem eſt triangulum, quod rectum angulum habet.



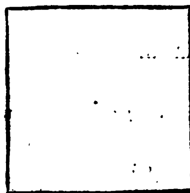
XXVIII.

Obtuſangulum eſt, quod obtuſum habet angulum.

XXIX.

Acutangulum vero, quod tres acutos angulos habet.

XXX.



Quadrilaterarum figurarum quadratum est, quod & æquilaterum est, & rectangulum.

XXXI.

Altera parte longior figura est, quæ rectangula quidem æquilatera vero non est.

XXXII.

Rhombus, quæ æquilatera quidem, sed rectangula non est.

XXXIII.



Rhomboides, quæ, & opposita latera, & oppositos angulos inter se æquales habens, neque æquilatera est, neque rectangula.

XXXIV.

Præter has autem reliquæ quadrilateræ figuræ trapezia vocentur.

XXXV.

Parallelæ, seu æquidistantes rectæ lineæ sunt, quæ cum in eodem sint plano, & ex utraque parte in infinitum producantur, in neutrum partem inter se conveniunt.

POSTULATA.

I.

Postuletur à quovis puncto ad quodvis punctum rectam leneam ducere.

II.

Rectam lineam terminatam, in continuum & directum producere.

III.

Quovis centro, & intervallo circulum describere.

AXIOMATA.

AXIOMATA.

I.

Quæ eidem æqualia, & inter se sunt æqualia.

II.

Et si æqualibus æqualia adjiciantur tota sunt æqualia.

III.

Et si ab æqualibus æqualia auferantur, reliqua sunt æqualia.

IV.

Et si inæqualibus æqualia adjiciantur, tota sunt inæqualia.

V.

Et si ab inæqualibus æqualia auferantur, reliqua sunt inæqualia.

VI.

Et quæ ejusdem duplicia sunt, inter se sunt æqualia.

VII.

Et quæ ejusdem dimidia sunt, inter se sunt æqualia.

VIII.

Et quæ sibi mutuo congruunt, inter se sunt æqualia.

IX.

Totum est sua parte majus.

X.

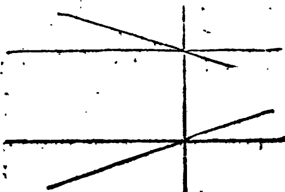
Duæ rectæ lineæ spatium non comprehendunt.

XI.

Omnes anguli recti inter se æquales sunt.

XII.

Et si in duas rectas lineas recta linea incidens, interiores, & ex eadem parte angulos duobus rectis minores fecerit, rectæ lineæ illæ in infinitum productæ, inter se conveniunt ex ea parte, in qua sunt anguli duobus rectis minores.



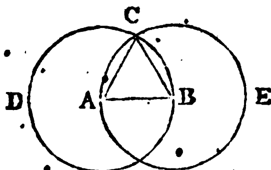
Not. *Cum plures anguli ad unum punctum existunt, designatur quilibet tribus literis, quarum illa quæ est ad verticem anguli, in medio ponitur.* V. G. *in figura* Prop. 13. *libri primi angulus à rectis* A B, B C *comprehensus dicitur angulus* A B C, *& angulus à rectis* A B, B E *contentus dicitur angulus* A B E.

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

Super datâ rectâ lineâ terminatâ, triangulum æquilaterum constituere.

Sit data recta linea terminata A B, oportet super ipsa A B triangulum æquilaterum constituere. Centro quidem A intervallo autem A B circulus describatur B C D [a]. Et rursus centro B, intervalloque B A describatur circulus A C E [a], & à puncto C, in quo circuli se invicem secant, ad A B ducantur rectæ lineæ C A, C B [b]. Quoniam igitur A centrum est circuli D B C, erit A C ipsi A B [c] æqualis, rursus quoniam B circuli C A E est centrum, erit B C æqualis B A: ostensa est autem & C A æqualis A B. utraque igitur ipsarum C A C B ipsi A B est æqualis. Quæ autem eidem sunt æqualia, & inter se æqualia sunt. Ergo C A ipsi C B est æqualis tres igitur C A A B B C inter se sunt æquales; ac propterea triangulum æquilaterum est A B C, & constitutum est super data recta linea terminata A B. quod fecisse oportebat.

a 3. Post.
b 1. Post.
c 15. Def.

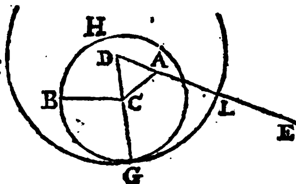


PROP. II. PROBL.

Ad datum punctum, datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere.

Sit datum quidem punctum A, data vero recta linea B C. oportet ad A punctum, ipsi B C rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere. Ducatur à puncto A ad C recta linea A C [a]: & super ipsâ constituatur triangulum æquilaterum D A C [b]. producanturque in directum ipsis D A D C rectæ lineæ A E C G [c]. & centro quidem C, intervallo autem B C circulus B G H describatur [d]. Rursusque centro D, & intervallo L G describatur circulus G K L. Quoniam igitur punctum C centrum est B G H circuli, erit B C ipsi C G æqualis [e]. Et rursus quoniam D centrum est circuli G K L, erit D L æqualis D G: quarum D A est æqualis D C. reliqua igitur A L reliquæ G C est æqualis [f]. Ostensa autem

a Postul. 1.
b Prima hujus.
c Postul. 2.
d 3. Post.
e Def. 15.
f Axiom. 3.

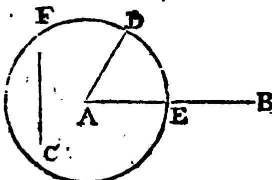


autem est BC æqualis CG. Quare utraque ipsarum AL BC est æqualis ipsi CG. Quæ autem eidem æqualia sunt, & inter se sunt æqualia. Ergo, & AL est æqualis BC. Ad datum igitur punctum A datæ rectæ lineæ BC æqualis posita est AL. Quod facere oportebat.

PROP. III. PROP.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus à majore minori æqualem abscindere.

Sint datæ duæ rectæ lineæ inæquales AB & C; quarum major sit AB. oportet à majore AB minori C æqualem rectam lineam abscindere. Ponatur ad A punctum ipsi C æqualis recta linea AD [a], & centro quidem A, intervallo autem AD circulus describatur DEF [b]. Et quoniam A centrum est DEF circuli, erit AE ipsi AD æqualis. Sed & C æqualis AD. Utraque igitur ipsarum AE, C ipsi AD æqualis erit. Quare & AE ipsi C est æqualis [c]. Duabus igitur datis rectis lineis inæqualibus AB & C à majore AB minori C æqualis Abscissa est: Quod fecisse oportebat.

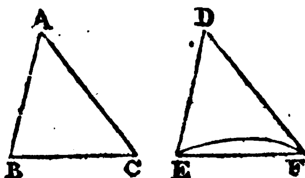


a Per antecedentem
b Post. 3.
c Axiom. 1.

PROP. IV. THEOR.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem, & angulum angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continetur: Et basim basi æqualem habebunt; & triangulum triangulo æquale erit; & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur.

Sint duo triangula ABC DEF, quæ duo latera AB AC duobus lateribus DE DF æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidem AB lateri DE æquale, latus vero AC ipsi DF; & angulum BAC angulo EDF æqualem. Dico, & basim BC basi EF æqualem esse, & triangulum ABC æquale triangulo DEF, & reliquos angulos reliquis angulis æ-



 quales,

quales, alterum alteri, quibus æqualia latera subtenduntur; nempe angulum ABC angulo DEF: & angulum ACB angulo DFE. Triangulo enim ABC applicato ipsi DEF, & puncto quidem A posito in D, recta vero linea AB in ipsa DE: & punctum B puncto E congruet; quod AB ipsi DE sit æqualis. Congruente autem AB ipsi DE; congruet & AC recta linea rectæ lineæ DF cum angulus BAC sit æqualis angulo EDF. Quare, & C congruet ipsi F; est enim recta linea AC æqualis rectæ DF. Sed, & punctum B congruebat puncto E. Ergo, & basis BC basi EF congruet. Nam si puncto quidem B congruente ipsi E, C vero ipsi F; basis BC basi EF non congruit; duæ rectæ lineæ spatium comprehendent: quod a fieri non potest. Congruet igitur BC basis, basi EF, & ipsi æqualis erit. Quare & totum ABC triangulum congruet toti triangulo DEF, & ipsi erit æquale; & reliqui anguli reliquis angulis congruent, & ipsis æquales b erunt. Videlicet angulus ABC angulo DEF, & angulus ACB angulo DFE. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, habeant autem & angulum angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & basim basi æqualem habebunt; & triangulum triangulo æquale erit; & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur: quod ostendere oportebat.

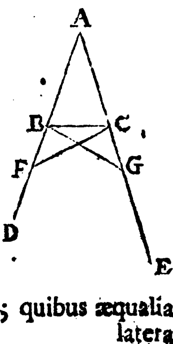
a Ax. 10.
b Axiom. 8.

PROP. V. THEOR.

Isoscelium triangulorum qui ad basim sunt anguli inter se sunt æquales, & productis æqualibus rectis lineis anguli qui sunt sub basi inter se æquales erunt.

Sit isosceles triangulum ABC; habens AB latus lateri AC æquale, & producantur in directum ipsis AB AC rectæ lineæ BD CE. Dico angulum quidem ABC angulo ACB, angulum vero CBD angulo BCE æqualem esse. Sumatur enim in linea BD, quodvis punctum F; atque à majore AE minori AF æqualis a auferatur AG; junganturque FC, GB. Quoniam igitur AF est æqualis AG; AB vero ipsi AC; duæ FA AC, duabus GA AB æquales sunt, altera alteri; & angulum FAG communem continent, basis igitur FC basi GB est b æqualis, & triangulum AFC æquale triangulo AGB; & reliqui anguli, reliquis angulis æquales erunt, alter alteri; quibus æqualia latera

a 3. hujus.
b 4. hujus.



latera subtenduntur: Videlicet angulus quidem ACF æqualis angulo ABG; angulus vero AFC angulo AGB. Et quoniam tota AF toti AG est æqualis; quarum AB est æqualis AC; erit [c] & reliqua BF reliquæ CG æqualis. Ostensa est autem FC æqualis GB. duæ igitur BF, FC duabus CG GB æquales sunt, altera alteri; & angulus BFC æqualis angulo CGB: estque basis ipsorum BC communis. Ergo & triangulum BFC triangulo CGB æquale erit; & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri; quibus æqualia latera subtenduntur. Angulus igitur FBC est æqualis angulo GCB; & angulus BCF angulo CBG. Itaque quoniam totus ABG angulus toti angulo ACF æqualis ostensus est, quorum angulus CBG est æqualis ipsi BCF: erit reliquus [d] ABC reliquo ACB æqualis; & sunt ad basim ABC trianguli: ostensus autem est & FBC angulus æqualis angulo GCB; qui sunt sub basi. Isoscelium igitur triangulorum, qui ad basim sunt anguli inter se sunt æquales, & productis æqualibus rectis lineis anguli, qui sunt sub basi, inter se æquales erunt. Quod ostendisse oportebat.

[c] Axiom. 3.

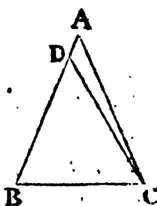
[d] Axiom. 3.

Cor. Hinc omne triangulum æquilaterum est quoque æquiangulum.

PROP. VI. THEOR.

Si trianguli duo anguli inter se sint æquales, & æquales angulos subtendentia latera inter se æqualia erunt.

Sit triangulum ABC, habens angulum ABC angulo ACB æqualem. Dico & AB latus lateri AC æquale esse: Si enim inæqualis est AB ipsi AC; altera ipsarum est major. Sit major AB; atque à majori AB minori AC æqualis [a] auferatur DB; & DC jungatur. Quoniam igitur DB est æqualis ipsi AC; communis autem BC: erunt duæ DB BC duabus AC CB æquales, altera alteri; & angulus DBC æqualis angulo ACB ex hyp. Basis igitur DC basi AB est [b] æqualis, & triangulum DBC æquale triangulo ACB, minus majori; quod est absurdum. Non igitur inæqualis est AB ipsi AC. Ergo æqualis erit. Si igitur trianguli duo anguli inter se sint æquales, & æquales angulos subtendentia latera inter se æqualia erunt: quod monstrasse oportuit.



[a] 3. hujus.

[b] 4. hujus.

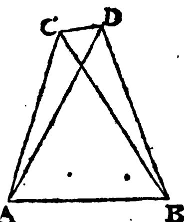
Cor. Hinc omne triangulum æquiangulum est quoque æquilaterum.

PRO-

PROP. VII. THEOR.

In eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis, aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri non constituentur ad aliud atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdem, quos primæ rectæ lineæ, terminos habentes.

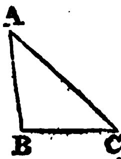
Si enim fieri potest, in eadem recta linea A B duabus eisdem rectis lineis A C C B, aliæ duæ rectæ lineæ A D D B æquales, altera alteri constituantur ad aliud atque aliud punctum C & D; ad easdem partes ut ad C & D, eosdem habentes terminos A & B quos primæ rectæ lineæ, ita ut C A quidem sit æqualis D A, eundem, quem ipsa terminum, habens A; C B vero sit æqualis D B, eundem habens B terminum; & C D jungatur. Itaque quoniam A C est æqualis A D; erit, a 5. hujus. & angulus A C D angulo A D C æqualis a. Major igitur est A D C angulus angulo B C D. Quare angulus B D C angulo B C D multo major erit. Rursus quoniam C B est æqualis D B & angulus B D C æqualis erit angulo B C D: ostensus autem est ipso multo major; quod fieri non potest. Non igitur in eadem recta linea duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri constituentur ad aliud atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdem, quos primæ rectæ lineæ, terminos habentes; quod ostendisse oportebat.

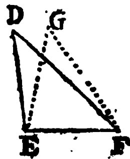


PROP. VIII. THEOR.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem & basim basi æqualem; angulum quoque, qui æqualibus lateribus continetur, angulo æqualem habebunt.

Sint duo triangula A B C, D E F, quæ duo latera A B, A C, duobus lateribus D E D F æqualia habeant alterum alteri; ut sit A B quidem æquale D E; A C vero ipsi D F; habeant autem, & basim B C basi E F æqualem.





Dico

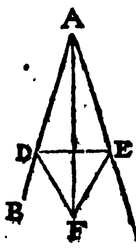
Dico angulum quoque BAC angulo EDF æqualem esse. Triangulo enim ABC applicato ipsi DEF triangulo, & puncto quidem B posito in E; recta vero linea BC in EF: congruet & C punctum puncto F, quoniam BC ipsi EF est æqualis. Itaque congruente BC ipsi EF; congruent & BA AC ipsis ED DF. si enim basis quidem BC basi EF congruit; latera autem BA AC lateribus ED DF non congruunt, sed situm mutent; ut EG GF: constituentur in eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis, aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri, ad aliud atque aliud punctum; ad easdem partes; eosdem habentes terminos. non coustituuntur autem; ut demonstratum [a] est. non igitur, si basis BC congruit basi EF, non congruent & BA AC latera lateribus ED DF. congruent igitur. Quare & angulus BAC angulo EDF congruet, & ipsi erit æqualis. Si igitur duo triangula, duo latera, duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem & basim basi æqualem: angulum quoque æqualibus lateribus contentum angulo æqualem habebunt: quod demonstrare oportebat.

[a] per 7. hujus.

PROP. IX. PROBL.

Datum angulum rectilineum bifariam secare.

Sit datus angulus rectilineus BAC; itaque oportet ipsum bifariam secare. Sumatur in linea AB quodvis punctum D; & à linea AC ipsi AD æqualis [a] auferatur AE; junctaque DE constituatur super ea [b] triangulum æquilaterum DEF; & AF jungatur. Dico angulum BAC à recta linea AF bifariam secari. Quoniam enim AD est æqualis AE: communis autem AF: duæ DA AF duabus EA AF æquales sunt, altera alteri; & basis DF æqualis basi EF. angulus [c] igitur DAF angulo EAF est æqualis. quare datus angulus rectilineus BAC à recta linea AF bifariam sectus est; quod facere oportebat.



[a] 3. hujus.
[b] 1. hujus.
[c] 8. hujus.

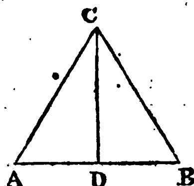
PROP. X. PROBL.

Datam rectam lineam terminatam bifariam secare.

Sit data recta linea terminata AB; oportet ipsam AB bifariam secare. constituatur super [a] ea triangulum æquilaterum ABC; &

[a] 1. hujus.

b 9. hujus. & secetur ACB angulus [b] bifariam recta linea CD. Dico AB rectam lineam in puncto D bifariam secari. Quoniam enim AC est æqualis CB; communis autem CD; duæ AC CD duabus BC CD æquales sunt; altera alteri; & angulus ACD æqualis angulo BCD. basis igitur

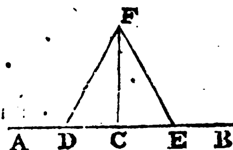


c 4. hujus. AD basi BD est [c] æqualis. Et ob id recta linea terminata AB bifariam secta est in puncto D: quod facere oportebat.

PROP. XI. PROBL.

Datæ rectæ lineæ à puncto in ipsa dato ad rectos angulos rectam lineam ducere.

Sit data recta linea AB, & datum in ipsa punctum C. oportet à puncto C ipsi AB ad rectos angulos rectam lineam ducere. Sumatur in AC quodvis punctum D: ipsique CD æ-
a 3. hujus. qualis [a] ponatur CE, & super DE.
b 1. hujus. constituatur [b] triangulum æquilaterum FDE, & FC jungatur. Dico datæ rectæ lineæ AB à puncto C in ipsa dato, ad rectos angulos ductam esse FC. Quoniam enim DC est æqualis CE, & FC communis; erunt duæ



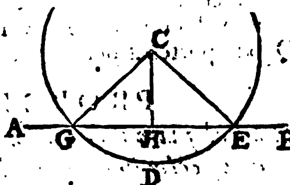
DC CF duabus EC CF æquales, altera alteri; & basis DF
c 8. hujus. est æqualis basi FE, angulus igitur DCF angulo ECF est [c] æqualis, & sunt deinceps. Quando autem recta linea super rectam lineam insistens, eos qui deinceps sunt, angulos æ-
d Def. 10. quales inter se fecerit; rectus [d] est uterque æqualium angulorum. ergo uterque ipsorum DCF FCE est rectus. Datæ igitur rectæ lineæ AB à puncto in ipsa dato C ad rectos angulos ducta est FC recta linea. Quod fecisse oportuit.

PROP. XII. PROBL.

Super data recta linea infinita, à dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit data quidem recta linea infinita AB, datum vero punctum C, quod in ea non est. Oportet super data recta linea

linea infinita A B, à dato puncto C, quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam ducere. Sumatur enim ad alteras partes ipsius A B rectæ lineæ quodvis punctum D: & centro quidem C, intervallo autem C D circulus [a] describatur E D G: & E G in H bifariam [b] secetur: junganturque C G, C H, C E. Dico super data recta linea infinita A B, à dato puncto C, quod in ea non est, perpendicularem C H ductam esse. Quoniam enim æqualis est G H ipsi H E, communis autem H C, duæ G H, H C, duabus E H, H C æquales sunt, altera alteri; & basis C G est æqualis basi C E. Angulus igitur C H G angulo C H E est [c] æqualis, & sunt deinceps. cum autem recta linea super rectam lineam insistens, eos qui deinceps sunt angulos, æquales inter se fecerit; rectus [d] est uterque æqualium angulorum & quæ insistit recta linea perpendicularis appellatur ad eam, cui insistit. ergo super data recta linea infinita A B à dato puncto C, quod in ea non est, perpendicularis ducta est C H. Quod facere oportebat.



a Postul. 3.
b 10. hujus.
c 8. hujus.
d Def. 10.

PROP. XIII. THEOR.

Cum recta linea super rectam consistens lineam angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis æquales efficiet.

Recta enim linea quædam A B super rectam C D consistens angulos faciat C B A, A B D. Dico C B A, A B D angulos vel duos rectos esse, vel duobus rectis æquales; si enim C B A est æqualis ipsi A B D; duo recti [a] sunt; sin minus, ducatur à puncto B ipsi C D ad rectos [b] angulos B E. anguli igitur C B E, E B D sunt duo recti. Et quoniam C B E, duobus C B A, A B E est æqualis, communis apponatur E B D: ergo anguli C B E, E B D tribus angulis C B A, A B E, E B D sunt [c] æquales. Rursus quoniam D B A angulus est æqualis duobus D B E, E B A, communis apponatur A B C. anguli igitur D B A, A B C tribus D B E, E B A, A B C æquales sunt. At ostensum est angulos quoque C B E, E B D eisdem tribus æquales esse: quæ vero eidem sunt æqualia, [d] & inter se æqualia sunt: ergo & anguli C B E, E B D ipsis D B A, A B C sunt æquales, suntque C B E, E B D duo recti anguli

a Def. 10.
b 11. hujus.
c Axiom. 2.
d Axiom. 1.

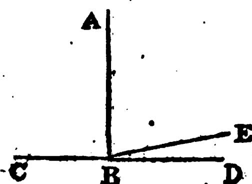
anguli, igitur DBA ABC duobus rectis æquales erunt. ergo cum recta linea super rectam lineam consistens angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis æquales efficiet. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XIV. THEOR.

Si ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in ea duæ rectæ lineæ non ad easdem partes positæ, angulos qui deinceps sunt, duobus rectis æquales fecerint; ipsæ rectæ lineæ in directum sibi invicem erunt.

Ad aliquam enim rectam lineam AB, atque ad punctum in ea B, duæ rectæ lineæ BC BD non ad easdem partes positæ angulos, qui deinceps sunt, ABC ABD duobus rectis æquales faciant. Dico BD ipsi CB in directum esse. si enim BD non est in directum ipsi CB, sit ipsi CB in directum BE. Quoniam igitur recta linea AB super rectam CBE consistit; anguli ABC ABE a duobus rectis sunt æquales. Sed & anguli ABC ABD sunt æquales duobus rectis. Anguli igitur CBA ABE ipsis CBA ABD æquales erunt. Communis auferatur ABC. Ergo reliquus ABE reliquo ABD est æqualis, minor majori quod fieri non potest. Non igitur BE est in directum ipsi BC. Similiter ostendemus neque aliam quampiam esse, præter BD. Ergo CB ipsi BD in directum erit. Si igitur ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in ea duæ rectæ lineæ non ad easdem partes positæ angulos, qui deinceps sunt, duobus rectis æquales fecerint, ipsæ rectæ lineæ in directum sibi invicem erunt. Quod demonstrare oportebat.

a 13. hujus.

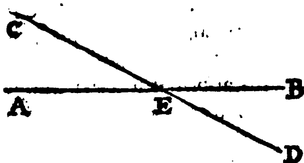


PROP. XV. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ se invicem secuerint, angulos qui ad verticem sunt, inter se æquales efficient.

Duæ enim rectæ lineæ AB CD se invicem secent in puncto E. Dico angulum quidem AEC angulo DEB; angulum vero CEB angulo AED æqualem esse. Quoniam enim recta linea AE super rectam CD consistens angulos facit CEA AED; erunt hi a duobus rectis æquales

a 13. hujus.



æquales. Rursus quoniam recta linea DE super rectam AB consistens facit angulos AED DEB; erunt AED DEB anguli æquales [a] duobus rectis. Ostensum autem est angulos quoque CEA AED duobus rectis esse æquales. Anguli igitur CEA AED angulis AED DEB æquales sunt. Communis auferatur AED. Ergo reliquus [b] CEA reliquo BED est æqualis. Simili ratione, & anguli CEB DEA æquales ostenduntur. Si igitur duæ rectæ lineæ se invicem secuerint, angulos, qui ad verticem sunt, æquales efficient. Quod ostendere oportebat. [b] Axiom. 3.

Cor. 1. Ex hoc manifeste constat duas rectas lineas se invicem secantes, facere angulos ad sectionem quatuor rectis æquales.

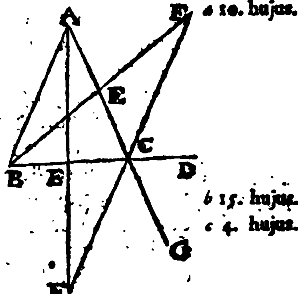
Cor. 2. Omnes anguli circa unum punctum constituti conficiunt angulos quatuor rectis æquales.

PROP. XVI. THEOR.

Omnis trianguli uno latere producto exterior angulus utrovis interiore, & opposito est major.

Sit triangulum ABC, & unum ipsius latus BC ad D producatur. Dico exteriorem angulum ACD utrovis interiore, & opposito, videlicet CBA, & BAC majorem esse. Secetur enim AC bifariam [a] in E, & juncta BE producatur ad F; ponaturque ipsi BE æqualis EF. Jungatur præterea FC & AC ad G producatur. Quoniam igitur AE quidem est æqualis EC, BE vero ipsi EF, duæ AE EB duabus CE EF æquales sunt, altera alteri: & angulus AEB angulo FEC est æqualis [b], ad verticem enim sunt. Basis igitur AB æqualis [c] est basi FC; & AEB triangulum triangulo FEC & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. Ergo angulus BAE est æqualis angulo ECF. Sed ECD angulus major est ipso ECF. Major igitur est angulus ACD angulo BAE. Similiter recta linea BC bifariam secta, ostendetur etiam BCG angulus, hoc est ACD angulus angulo ABC major. Omnis igitur trianguli uno latere producto exterior angulus utrovis interiore, & opposito major est. Quod oportebat demonstrare.

[a] 10. hujus.
[b] 15. hujus.
[c] 4. hujus.



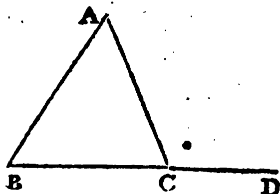
PRO-

PROP. XVII. THEOR.

Omnis trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt, quomodocunque sumpti.

Sit triangulum A B C. Dico ipsius A B C trianguli duos angulos quomodocunque sumptos duobus rectis minores esse. Producatur enim B C ad D. Et quoniam trianguli A B C exterior angulus A C D major [a] est interiore, & opposito A B C: communis apponatur ACB. Anguli igitur A C D A C B angulis A B C A C B majores sunt. Sed A C D A C B sunt [b] æquales duobus rectis. Ergo A B C B C A duobus rectis sunt minores. Similiter demonstrabimus angulos quoque B A C A C B itemque C A B A B C duobus rectis minores esse. Omnis igitur trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt; quomodocunque sumpti. Quod demonstrare oportebat.

[a] 16. hujus.
[b] 13. hujus.

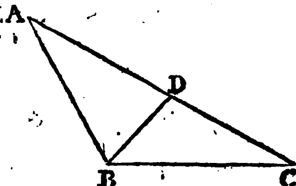


PROP. XVIII. THEOR.

Omnis trianguli majus latus majorem angulum subtendit.

Sit triangulum A B C habens latus A C latere A B majus. Dico, & A B C angulum angulo B C A majorem esse. Quoniam enim A C major est, quam A B, ponatur ipsi A B æqualis A D; & B D jungatur. Et quoniam trianguli B D C exterior angulus est A D B, erit is major [a] interiore, & opposito D C B. Sed A D B æqualis [b] est ipsi A B D, quod & latus A B lateri A D sit æquale, major igitur est & A B D angulus angulo A C B, quare A B C ipso A C B multo major erit. Omnis igitur trianguli majus latus majorem angulum subtendit: quod oportebat demonstrare.

[a] 16. hujus.
[b] 5. hujus.

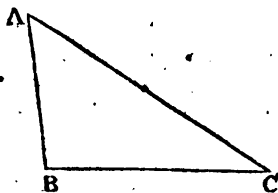


PROP. XIX. THEOR.

Omnis trianguli major angulus majus latus subtendit.

Sit triangulum A B C majorem habens A B C angulum angulo B C A. Dico & latus A C latere A B majus esse. Si enim non

non est majus, vel A C est æquale ipsi A B, vel ipso minus, æquale igitur non est, nam & angulus A B C angulo A C B æqualis [a] esset; non est autem. Non igitur A C ipsi A B est æquale. Sed neque minus. esset enim & angulus A B C angulo A C B minor [b]. atqui non est, non igitur A C minus est ipso A B. Ostensum autem est neque æquale esse: ergo A C ipso A B est majus. Omnis igitur trianguli major angulus majus latus subtendit. Quod oportebat demonstrare.



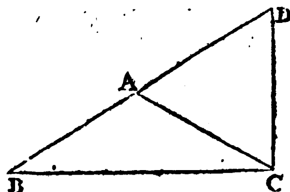
a 5. hujus.

b 18. hujus.

PROP. XX. THEOR.

Omnis trianguli duo latera reliquo majora sunt, quomodocunque sumpta.

Sit enim triangulum A B C. Dico ipsius A B C trianguli duo latera reliquo majora esse, quomodocunque sumpta: videlicet latera quidem B A A C majora latere B C; latera vero A B B C majora latere A C; & latera B C C A majora ipso A B. producatur enim B A ad punctum D; ponaturque ipsi C A æqualis A D [a]; & D C jungatur. quoniam igitur D A est æqualis A C erit & angulus A D C angulo A C D æqualis [b]. Sed B C D angulus major est angulo A C D. Angulus igitur B C D angulo A D C est major; Et quoniam triangulum est D C B habens B C D angulum majorem angulo B D C; majorem autem angulum majus latus subtendit [c]: erit latus D B latere B C majus. sed D B est æquale ipsis B A A C. quare latera B A A C ipso B C majora sunt. similiter ostendemus, & latera quidem A B B C majora esse latere C A: latera vero B C C A ipso A B majora. Omnis igitur trianguli duo latera reliquo majora sunt, quomodocunque sumpta. Quod ostendere oportebat.



a 3. hujus.

b 5. hujus.

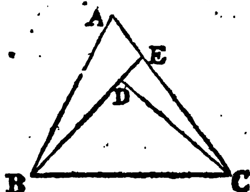
c 19. hujus.

PROP. XXI. THEOR.

Si à terminis unius lateris trianguli duæ rectæ lineæ intra constituantur, hæ reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, majorem vero angulum continebunt.

 Trian-

Trianguli enim ABC in uno latere BC à terminis BC duæ rectæ lineæ intra constituantur BD DC. Dico BD DC reliquis duobus, trianguli lateribus BA AC minores quidem esse, vero continere angulum BDC majorem angulo BAC. producatur enim BD ad E. & quoniam omnis trianguli duo latera reliquo sunt majora, [a] erunt trianguli ABE duo latera BA AE majora latere BE. communis apponatur EC. ergo BA AC ipsis BE EC majora [b] sunt. rursus quoniam CED trianguli duo latera CE ED sunt majora latere CD, communis apponatur DB. quare CE EB ipsis CD DB sunt majora [b]. Sed ostensum est BA AC majora esse BE EC. multo igitur BA AC ipsis BD DC majora sunt. rursus quoniam omnis trianguli exterior angulus interiore & opposito est major [c]: erit trianguli CDE exterior angulus BDC major ipso CED. Eadem ratione & trianguli ABE exterior angulus CEB ipso BAC est major [c] sed angulus BDC ostensus est major angulo CEB. multo igitur BDC angulus angulo BAC major erit. Quare si à terminis unius lateris trianguli duæ rectæ lineæ intra constituantur, hæ reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, majorem vero angulum continebunt. Quod demonstrare oportebat.

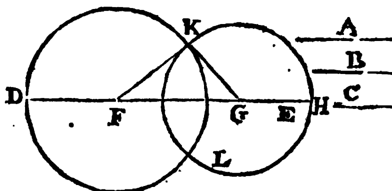


a 20. hujus.
b Axiom. 4.
c 16. hujus.

PROP. XXII. PROBL.

Ex tribus rectis lineis, quæ tribus rectis lineis datis æquales sunt, triangulum constituere. Oportet autem duas reliqua majores esse, quomodocunque sumptas; quoniam omnis trianguli duo latera reliquo majora sunt, quomodocunque sumpta.

Sint tres datæ rectæ lineæ A, B, C, quarum duæ reliqua majores sint, quomodocunque sumptæ, ut scil. A, B, quidem sint majores quam C, A, C, vero majores quam B, & præterea B, C, majores quam A. Itaque oportet ex rectis lineis æqualibus ipsis A, B, C, triangulum constituere. exponatur aliqua recta linea DE, terminata quidem ad D, infinita vero ad E, &



ponatur

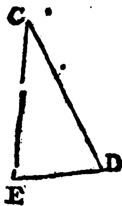
ponatur ipsi quidem A æqualis [a] DF, ipsi vero B æqualis FG, & ipsi C æqualis GH: & centro F, intervallo autem FD circulus [b] describatur DKL. rursusque centro G, & intervallo GH alius circulus KLH, describatur, & jungantur KF KG. Dico ex tribus rectis lineis æqualibus ipsis A, B, C, triangulum KFG constitutum esse, quoniam enim punctum F centrum est DKL circuli; erit FD æqualis [c] FK. sed FD est æqualis A. Ergo & FK ipsi A est æqualis. rursus quoniam punctum G centrum est circuli LKH, erit GH æqualis [c] GK. sed GH est æqualis C. ergo & GK ipsi C æqualis erit. est autem & FG æqualis B: tres igitur rectæ lineæ KF FG GK tribus A, B, C, æquales sunt. Quare ex rribus rectis lineis KF FG GK, quæ sunt æquales tribus datis rectis lineis A, B, C, triangulum constitutum est KFG. Quod facere oportebat.

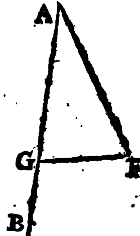
[a] 3. hujus.
[b] 3. Postul.
[c] Def. 15.

PROP. XXIII. PROBL.

Ad datam rectam lineam, & ad datum in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.

Sit data quidem recta linea AB, datum vero in ipsa punctum A; & datus angulus rectilineus DCE. Oportet igitur ad datam rectam lineam AB, & ad datum in ea punctum A, dato angulo rectilineo DCE, æqualem angulum rectilineum constituere. sumantur in utraque ipsarum CD CE quævis puncta D, E, ducaturque DE, & ex tribus rectis lineis, quæ æquales sint tribus CD DE EC triangulum [a] constituatur AFG, ita ut CD sit æqualis AF, & CE ipsi AG, & DE ipsi FG. Itaque quoniam duæ DC CE duabus FA AG æquales sunt, altera alteri, & basis DE est æqualis basi FG: erit & angulus DCE angulo FAG æqualis [b]. Ad datam igitur rectam lineam AB, & ad datum in ea punctum A, dato angulo rectilineo DCE æqualis angulus rectilineus constitutus est FAG. Quod facere oportebat.





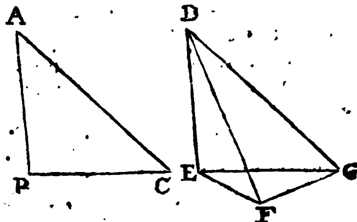
[a] 22. hujus.
[b] 8. hujus.

PROP. XXIV. PROBL.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, angulum autem angulo majorem,

rem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & basim basi majorem habebunt.

Sint duo triangula ABC DEF, quæ duo latera AB AC duobus lateribus DE DF æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidem AB æquale lateri DE; latus vero AC æquale DF: At angulus BAC angulo EDF sit major. Dico, & basim BC basi EF majorem esse. quoniam enim angulus BAC major est angulo EDF, constituatur [a] ad rectam lineam DE, & ad punctum in ea D, angulo BAC æqualis angulus EDG, ponaturque alterutri ipsarum AC DF æqualis [b] DG, & GE FG jungantur. itaque quoniam AB quidem est æqualis DE, AC vero ipsi DG, duæ BA AC duabus ED DG æquales sunt, altera alteri; & angulus BAC est æqualis angulo EDG. ergo basis BC basi EG est [c] æqualis rursus quoniam æqualis est DG ipsi DF; est angulus DFG angulo DGF [d] æqualis; erit itaque DFG angulus angulo EGF major. multo igitur major est EFG angulus ipso EGF. & quoniam triangulum est EFG, angulum EFG majorem habens angulo EGF; majori autem angulo latus majus subtenditur [e]; erit & latus EG latere EF majus. sed EG latus est æquale lateri BC. Ergo, & BC ipso EF majus erit. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, angulum autem angulo majorem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & basim basi majorem habebunt. Quod oportebat demonstrare.



a 23. hujus.
b 3. hujus.
c 4. hujus.
d 5. hujus.
e 19. hujus.

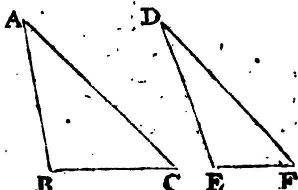
PROP. XXV. THEOR.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, basim vero basi majorem: & angulum angulo, qui æqualibus lateribus continetur, majorem habebunt.

Sint duo triangula ABC DEF, quæ duo latera AB AC duobus lateribus DE DF æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus AB æquale lateri DE, & latus AC lateri DF; basis autem BC basi EF sit major. Dico, & angulum

BAC

BAC angulo EDF majorem esse. Si enim non est major, vel æqualis est, vel minor. Æqualis autem non est angulus BAC angulo EDF: esset enim, & basis BC basi EF æqualis [a]. Non est autem. Non igitur æqualis est BAC angulus angulo EDF. Sed neque minor. minor enim esset [b] & basis BC basi EF. Atqui non est. Non igitur angulus BAC angulo EDF est minor. ostensum autem est neque esse æqualem. Ergo angulus BAC angulo EDF necessario major erit. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, basim vero basi majorem; & angulum angulo qui æqualibus lateribus continetur, majorem habebunt. Quod demonstrare oportebat.



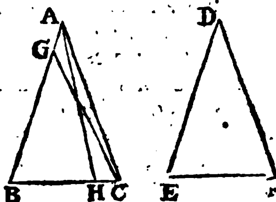
[a] 4. hujus.

[b] 24. hujus.

PROP. XXVI. THEOR.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeant, alterum alteri, unumque latus uni lateri æquale, vel quod æqualibus adjacet angulis, vel quod uni æqualium angulorum subtenditur; & reliqua latera reliquis lateribus æqualia; alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

Sint duo triangula ABC DEF, quæ duos angulos ABC BCA duobus angulis DEF EFD æquales habeant, alterum alteri, videlicet angulum quidem ABC æqualem angulo DEF; angulum vero BCA angulo EFD. Habeant autem, & unum latus uni lateri æquale, & primo quod æqualibus adjacet angulis; nempe latus BC lateri EF. Dico, & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habere, alterum alteri, latus sc. AB lateri DE; & latus AC ipsi DF, & reliquum angulum BAC reliquo angulo EDF æqualem. Si enim inæqualis est AB ipsi DE, una ipsarum major est: Sit major AB, ponaturque GB æqualis DE; & GC jungatur. Quoniam igitur BC quidem est æqualis DE, BC vero ipsi EF, duæ GB BC duabus DE EF æquales sunt, altera alteri: & angulus GBC æqualis angulo DEF. basis igitur GC basi DF est [a] æqualis: & GBC triangulum triangulo DEF, & reliqui

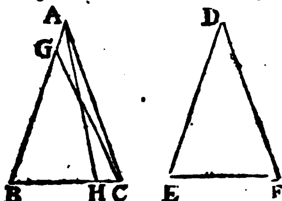


[a] 4. hujus.

 liqui

liqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. ergo G C B angulus est æqualis angulo D F E. sed angulus D F E angulo B C A æqualis ponitur. quare, & B C G angulus angulo B C A est æqualis, minor majori, quod fieri non potest. non igitur inæqualis est A B ipsi D E. ergo æqualis erit. est autem, & B C æqualis E F. Itaque duæ A B B C duabus D E E F æquales sunt, altera alteri, & angulus A B C æqualis angulo D E F. Basis

a 4. hujus. igitur A C basi [a] D F, & reliquus angulus B A C reliquo angulo E D F est æqualis. Sed rursus sint latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur æqualia, ut A B ipsi D E. Dico rursus, & reliqua latera reliquis lateribus æqualia esse; A C quidem ipsi D F, B C vero ipsi E F: & adhuc reliquum angulum B A C reliquo angulo E D F æqualem. Si enim inæqualis est B C ipsi E F, una ipsarum major est. Sit major B C, si fieri



potest, ponaturque B H æqualis E F, & A H jungatur. Quoniam igitur B H quidem est æqualis E F, A B vero ipsi D E; duæ A B B H duabus D E E F æquales sunt, altera alteri, & angulos æquales continent; ergo [a] basis A H basi D F est æqualis: & A B H triangulum triangulo D E F & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. Æqualis igitur est angulus B H A an-

b ex hyp. gulo E F D. sed E F D est æqualis [b] angulo B C A. Ergo, & B H A angulus angulo B C A est æqualis. trianguli igitur A H C exterior angulus B H A æqualis est interiori & op-

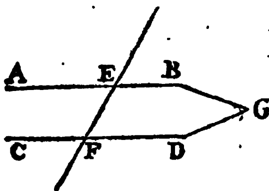
c 16. hujus. posito B C A, quod fieri non potest [c]. quare non inæqualis est B C ipsi E F. æqualis igitur. est autem, & A B æqualis D E. duæ igitur A B B C duabus D E E F æquales sunt, altera alteri; angulosque æquales continent. quare basis A C æqualis est basi D F, & A B C triangulum triangulo D E F, & reliquus angulus B A C reliquo angulo E D F est æqualis. Si igitur duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeant, alterum alteri, unumque latus uni lateri æquale, vel quod æqualibus adjacet angulis, vel quod uni æqualium angulorum subtenditur; & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt. Quod oportebat demonstrare.

PROP.

PROP. XXVII. THEOR.

Si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter se æquales fecerit, parallelæ erunt rectæ lineæ.

In duas enim rectas lineas A B C D, recta linea E F incidens alternos angulos A E F E F D æquales inter se faciat. dico rectam lineam A B ipsi C D parallelam esse. Si enim non est parallela, productæ A B, C D, vel ad partes B D convenient, vel ad partes A C. producantur, conveniantque ad partes B D in puncto G. itaque G E F trianguli exterior angulus A E F major [a] est interiore & opposito E F G. sed & æqualis [b], quod fieri non potest. non igitur A B C D productæ ad partes B D convenient. similiter demonstrabitur neque convenire ad partes A C. quæ vero in neutras partes conveniunt, parallelæ [c] inter se sunt. parallela igitur est A B ipsi C D. Quare si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter se æquales fecerit, parallelæ inter se erunt rectæ lineæ, quod ostendere oportebat.

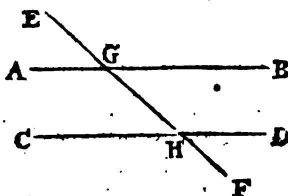


a 16. hujus.
b ex hyp.
c Def. 35.

PROP. XXVIII. THEOR.

Si in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori, & opposito, & ad easdem partes æqualem fecerit, vel interiores, & ad easdem partes duobus rectis æquales; parallelæ erunt inter se rectæ lineæ.

In duas enim rectas lineas A B C D recta linea E F incidens exteriorem angulum E G B interiori, & opposito G H D æqualem faciat; vel interiores & ad easdem partes B G H G H D, duobus rectis æquales. dico rectam lineam A B rectæ C D parallelam esse. Quoniam enim E G B angulus æqualis est [a] angulo G H D, angulus autem E G B angulo A G H [b], erit & angulus A G H angulo G H D æqualis: & sunt alterni. parallela igitur est A B ipsi C D [c]. rursus quoniam anguli B G H G H D duobus rectis sunt æquales [a], & sunt A G H B G H æquales



a Ex hyp.
b 15. hujus.
c Ex antecedente.

d 13. hujus. quales duobus rectis d: erunt anguli AGH BGH angulis BGH GHD æquales communis auferatur BGH. reliquus igitur AGH est æqualis reliquo GHD: & sunt alterni. ergo AB ipsi CD parallela erit. Si igitur in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori, & opposito, & ad easdem partes æqualem fecerit, vel interiores, & ad easdem partes duobus rectis æquales; parallelæ erunt inter se rectæ lineæ. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXIX. THEOR.

In parallelas rectas lineas recta linea incidens, & alternos angulos inter se æquales, & exteriorem interiori & opposito & ad easdem partes æqualem, & interiores, & ad easdem partes duobus rectis æquales efficiet.

In parallelas enim rectas lineas AB CD recta linea incidat EF. dico alternos angulos AGH GHD inter se æquales efficere, & exteriorem EGB interiori, & opposito, & ad easdem partes GHD æqualem: & interiores, & ad easdem partes BGH GHD duobus rectis æquales. si enim inæqualis est AGH ipsi GHD, unus ipsorum major est. sit major AGH. & quoniam AGH angulus major est angulo GHD; communis apponatur BGH. anguli igitur AGH BGH angulis BGH GHD majores sunt.

a 13. hujus. sed anguli AGH BGH sunt æquales duobus rectis a. ergo BGH GHD anguli sunt duobus rectis minores. quæ vero à minoribus, quam sunt duo recti, in infinitum producuntur

b Axiom. 12. rectæ lineæ, inter se conveniunt b. ergo rectæ lineæ AB CD in infinitum productæ convenient inter se. atqui non conveniunt cum parallelæ ponantur. non igitur inæqualis est AGH angulus angulo GHD. quare necessario est æqualis.

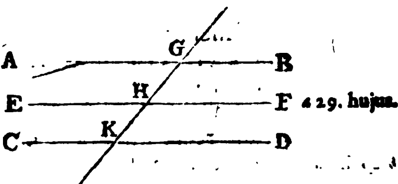
c 15. hujus. angulus autem AGH æqualis est angulo EGB c. ergo, & EGB ipsi GHD æqualis erit. communis apponatur BGH. anguli igitur EGB BGH sunt æquales angulis BGH GHD. sed EGB BGH æquales sunt duobus rectis: Ergo, & BGH GHD duobus rectis æquales erunt. In parallelas igitur rectas lineas recta linea incidens, & alternos angulos inter se æquales & exteriorem interiori, & opposito, & ad easdem partes æqualem; & interiores, & ad easdem partes duobus rectis æquales efficiet. Quod oportebat demonstrare.

PROP.

PROP. XXX. THEOR.

Quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, & inter se parallelæ erunt.

Sit utraque ipsarum AB CD ipsi EF parallela. dico & AB ipsi CD parallelam esse. Incidat enim in ipsas recta linea GK. & quoniam in parallelas rectas lineas AB EF, recta linea GK incidit, angulus AGH angulo GHF est æqualis [a]. rursus quoniam in parallelas rectas lineas EF CD, recta linea incidit GK, æqualis est GHF angulus angulo GKD [a]. ostensus autem est, & angulus AGK angulo GHF æqualis. ergo, & AGK ipsi GKD æqualis erit. & sunt alterni. parallela igitur est AB ipsi CD [b]. ergo quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, & inter se parallelæ erunt. Quod oportebat demonstrare.



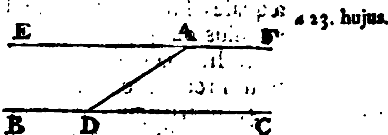
[a] 29. hujus.

[b] 27. hujus.

PROP. XXXI. PROBL.

Per datum punctum datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

Sit datum quidem punctum A, data vero recta linea BC oportet per A punctum ipsi BC rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere. Sumatur in BC quodvis punctum D, & jungatur AD: constituaturque [a] ad rectam lineam DA, & ad punctum in ipsa A, angulo ADC æqualis angulus DAE: & in directum ipsi EA recta linea AF producatur. quoniam igitur in duas rectas lineas BC EF recta linea AD incidens alternos angulos EAD ADC inter se æquales efficit, EF ipsi BC parallela erit [b]. per datum igitur punctum A datæ rectæ lineæ BC parallela ducta est recta linea EAF. quod facere oportebat.



[a] 23. hujus.

[b] 27. hujus.

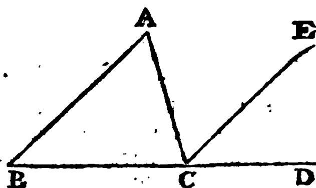
PROP. XXXII. THEOR.

Omnis trianguli uno latere producto exterior angulus duobus interioribus, & oppositis est æqualis, & trianguli tres interiores anguli duobus rectis æquales sunt.

Sit

Sit triangulum ABC: & unum ipsius latus BC in D producatur. dico angulum exteriorem ACD duobus interioribus, & oppositis CAB ABC æqualem esse; & trianguli tres interiores angulos ABC BCA CAB duobus rectis esse æquales. ducatur [a] enim per punctum C ipsi AB rectæ lineæ parallela CE. & quoniam AB ipsi CE parallela est, & in ipsas incidit AC, alterni anguli BAC ACE inter se æquales sunt [b]. rursus quoniam AB parallela est CE & in ipsas incidit recta linea BD, exterior angulus ECD interiori & opposito ABC est æqualis [b]. ostensus autem est angulus ACE æqualis angulo BAC. quare totus ACD exterior angulus æqualis est duobus interioribus, & oppositis BAC ABC. communis apponatur ACB. anguli igitur ACD ACB tribus ABC BAC ACB æquales sunt. sed anguli ACD ACB sunt æquales [c] duobus rectis. ergo & ACB CBA CAB duobus rectis æquales erunt. Omnis igitur trianguli uno latere producto exterior angulus duobus interioribus, & oppositis est æqualis; & trianguli tres interiores anguli duobus rectis æquales sunt. Quod demonstrare oportebat.

a 13. hujus.
b 29. hujus.
c 13. hujus.



COROLLARIA.

1. Omnes tres anguli cujusque trianguli simul sumpti æquales sunt tribus angulis cujusque alterius trianguli simul sumptis.

2. Si in uno triangulo duo anguli aut singuli aut simul æquales sint duobus angulis alterius trianguli, erit reliquus angulus reliquo æqualis.

3. In triangulo si unus angulus rectus sit, reliqui simul unum rectum conficiunt.

4. In triangulo Isoscele si angulus æquis cruribus contentus rectus sit, reliqui ad basim sunt semirecti.

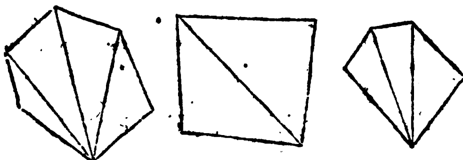
5. In triangulo æquilatero angulus quilibet æqualis est $\frac{1}{3}$ duorum rectorum vel $\frac{2}{3}$ unius recti.

THEOREMA.

Omnes simul interiores anguli cujuscunque figuræ rectilineæ conficiunt bis tot rectos demptis quatuor quot sunt latera figuræ.

Nam figura unaquæque rectilinea resolvi potest in triangula binario pauciora quam sunt ipsius figuræ latera, V. gr. si quatuor latera habeat resolvitur in duo triangula; si quinque in tria

tria triangula, si sex in quatuor, & sic deinceps; quare per præcedentem omnes horum triangulorum anguli æquantur bis tot rectis quot sunt triangula, sed omnes horum triangulorum



anguli æquales sunt angulis figuræ interioribus; quare omnes anguli interiores figuræ æquales sunt bis tot rectis quot sunt triangula, hoc est bis tot rectis demptis quatuor quot sunt latera figuræ. Q. E. D.

THEOR. II.

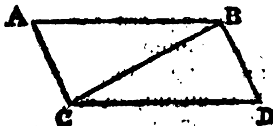
Omnes simul exteriores anguli cujusque figuræ rectilineæ conficiunt quatuor rectos.

Nam exteriores simul cum interioribus conficiunt bis tot rectos quot sunt latera figuræ; vero ex precedente Theor. omnes interiores soli conficiunt bis tot rectos demptis quatuor quot sunt latera figuræ, quare exteriores conficiunt quatuor rectos. Q. E. D.

PROP. XXXIII. THEOR.

Quæ æquales, & parallelas ad easdem partes conjungunt rectæ lineæ, & ipsæ æquales, & parallelæ sunt.

Sint æquales, & parallelæ A B C D: & ipsas conjungant ad easdem partes rectæ lineæ A C B D. dico A C B D æquales, & parallelas esse. ducatur enim B C & quoniam A B parallela est C D, in ipsaque incidit B C; alterni anguli A B C B C D æquales sunt *a*, rursus quoniam A B est æqualis C D, communis autem B C, duæ A B B C duabus B C C D sunt æquales; & angulus A B C æqualis angulo B C D. basis igitur A C basi B D est æqualis *b*: triangulumque A B C triangulo B C D: & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia altera subtenduntur. ergo angulus A C B angulo C B D est æqualis. & quoniam in duas rectas lineas A C B D recta linea B C incidens, alternos angulos A C B C B D æquales



a 29. hujus.

b 4. hujus.

c 27. hujus. les inter se efficit, parallela est AC ipsi BD c, Ostensa autem est & ipsi æqualis. Quæ igitur æquales, & parallelas ad easdem partes conjungunt rectæ lineæ, & ipsæ æquales, & parallelæ sunt. Quod oportebat demonstrare.

Defin. *Parallelogrammum est figura quadrilatera cujus bina opposita latera sunt parallela.*

PROP. XXXIV. THEOR.

Parallelogrammorum spatiorum latera quæ ex opposito, & anguli, inter se æqualia sunt; & diameter ea bifariam secat.

Sit parallelogrammum ABDC, cujus diameter BC. dico ACDB parallelogrammi latera, quæ ex opposito, & angulos inter se æqualia esse; & diametrum BC ipsum bifariam secare. Quoniam enim parallela est AB ipsi CD, & in ipsas incidit recta linea BC; anguli alterni ABC BCD inter se æquales sunt a. rursus quoniam AC ipsi BD parallela est, & in ipsas incidit BC; alterni anguli ACB CBD æquales sunt

a 29. hujus. inter se a. duo igitur triangula sunt ABC CBD, quæ duos angulos ABC BCA duobus angulis BCD CBD æquales habent, alterum alteri; & unum latus uni lateri æquale, scil. quod

b 26. hujus. est ad æquales angulos, utrique commune BC. ergo, b & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem, æquale igitur est latus quidem AB lateri CD: latus vero AC, ipsi BD, & angulus BAC angulo BDC æqualis. & quoniam angulus ABC est æqualis angulo BCD; & angulus CBD; angulo ACB; erit totus angulus ABD æqualis toti ACD. ostensus autem est, & angulus BAC angulo BDC æqualis. parallelogrammorum igitur spatiorum latera, quæ ex opposito, & anguli, inter se æqualia sunt. dico etiam diametrum ea bifariam secare. quoniam enim æqualis est AB ipsi CD communis autem BC. duæ AB BC duabus DC CB æquales sunt, altera alteri & angulus ABC æqualis est angulo BCD.

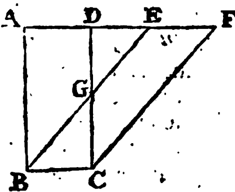
c 4. hujus. basis igitur AC basi DB æqualis. quare, & triangulum ABC triangulo BCD æquale erit. ergo diameter BC parallelogrammum ACDB bifariam secat. Quod oportebat demonstrare.

PROP.

PROP. XXXV. THEOR.

Parallelogramma super eadem basi, & in iisdem parallelis constituta, inter se æqualia sunt.

Sint parallelogramma ABCD, EBCF super eadem basi BC, & in eisdem parallelis AF BC constituta. dico ABCD parallelogrammo EBCF æquale esse. Quoniam enim parallelogrammum est ABCD, æqualis [a] est AD ipsi BC. eadem quoque ratione, & EF est æqualis BC. quare &, AD ipsi EF æqualis erit [b]: & communis DE. tota igitur AE [c] toti DF est æqualis. est autem, & AB æqualis DC. ergo duæ EA AB duabus FD DC æquales sunt, altera alteri, & angulus FDC æqualis angulo EAB, exterior interiori [d], basis igitur EB basi FC est [e] æqualis, & EAB triangulum æquale triangulo FDC. commune auferatur DGE. reliquum igitur trapezium ABGD reliquo trapezio EGCF est æquale [f]. commune apponatur GBC triangulum. ergo totum parallelogrammum ABCD toti parallelogrammo EBCF æquale erit. Parallelogramma igitur super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta inter se æqualia sunt. Quod oportebat demonstrare.

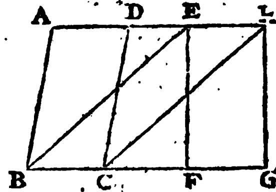


a 34. hujus.
b Axiom. 1.
c Axiom. 2.
d 29. hujus.
e 4. hujus.
f Axiom. 3.

PROP. XXXVI. THEOR.

Parallelogramma super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta inter se æqualia sunt.

Sint parallelogramma ABCD EFGH super æqualibus basibus BC FG, & in eisdem parallelis AH BG constituta. dico parallelogrammum ABCD parallelelogrammo EFGH æquale esse. Conjungantur enim BE CH. & quoniam æqualis [a] est BC ipsi FG & FG æqualis ipsi EH; erit & BC ipsi EH æqualis. suntque parallelæ, & ipsas conjungunt BE CH; quæ autem æquales, & parallelas ad easdem partes conjungunt, æquales, & parallelæ sunt [b]. ergo EB, CH & æquales sunt, & parallelæ: quare EBCH parallelogrammum est, & æquale parallelogrammo ABCD [c]; basim enim eandem habet BC, &



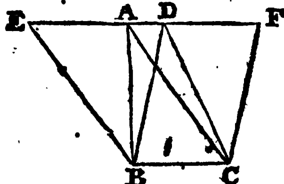
a Hyp.
b 33. hujus.
c 35. hujus.

& in eisdem parallelis B C, A D constituitur. simili ratione, & E F G H parallelogrammum eidem parallelogrammo E B C H est æquale. ergo parallelogrammum A B C D parallelogrammo E F G H æquale erit. Parallelogramma igitur super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta inter se sunt æqualia. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXXVII. THEOR.

Triangula super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta inter se æqualia sunt.

Sint triangula A B C D B C super eadem basi B C, & in eisdem parallelis A D B C constituta. dico A B C triangulum triangulo D B C æquale esse. Producatur A D ex utraque parte in E, F puncta: & per B quidem ipsi C A parallela ducatur B E, a 31. hujus. a per C vero ipsi B D parallela C F. parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum E B C A D B C F, & parallelogrammum c 35. hujus. E B C A est æquale c parallelogrammo D B C F, etenim super eadem sunt basi B C, & in eisdem parallelis B C E F: estque pa-

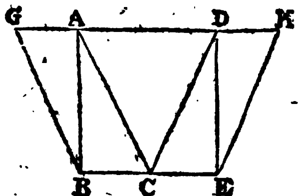


b 34. hujus. rallelogrammi quidem E B C A dimidium b A B C triangulum, cum diameter A B ipsum bifariam secet: parallelogrammi vero D B C F dimidium b triangulum D B C; diameter enim D C c Axiom. 7. ipsum bifariam secat. quæ autem c æqualium dimidia sunt inter se æqualia sunt. ergo triangulum A B C triangulo D B C est æquale. Triangula igitur super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta inter se æqualia sunt. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXXVIII. THEOR.

Triangula super basibus, æqualibus, & in eisdem parallelis constituta inter se sunt æqualia.

Sint triangula A B C D C E super æqualibus basibus, B C C E & in eisdem parallelis B E A D constituta. dico A B C triangulum D C E triangulo æquale esse. Producatur enim A D ex utraque parte in G, H puncta: & per B quidem ipsi C A parallela ducatur B G a: per E vero duca- a 31. hujus. tur E H parallela ipsi D C a. parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum G B C A D C E H.



atque

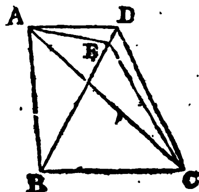
atque est parallelogrammum G B C A æquale [b] parallelogrammo D C E H: in æqualibus enim sunt basibus B C C E, & in eisdem B E G H parallelis. parallelogrammi vero G B C A dimidium [c] est A B C triangulum, nam diameter A B ipsum bifariam secat. & parallelogrammi D C E H dimidium [c] est triangulum D C E, diameter enim D E ipsum secat bifariam. quæ autem æqualium dimidia sunt [d], inter se æqualia sunt. ergo A B C triangulum triangulo D C E est æquale. Triangula igitur super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia. Quod demonstrare oportebat.

[b] 36. hujus. [c] 34. hujus. [d] Axiom. 7.

PROP. XXXIX. THEOR.

Triangula æqualia super eadem basi, & ad easdem partes constituta, in eisdem quoque sunt parallelis.

Sint æqualia triangula A B C D B C super eadem basi B C constituta, & ad easdem partes. dico, & in eisdem parallelis esse. ducatur enim A D. dico A D parallelam esse ipsi B C. Si enim non est parallela, ducatur [a] per A punctum ipsi B C parallela recta linea A E, & E C ducatur. æquale igitur est A B C triangulum triangulo E B C [b], super eadem enim est basi B C, & in eisdem B C, A E parallelis. sed A B C triangulum triangulo D B C [c] est æquale. ergo & triangulum D B C æquale est ipsi E B C triangulo, majus minori, quod fieri non potest. non igitur A E ipsi B C parallela est. similiter ostendemus neque aliam quampiam parallelam esse, præter ipsam A D, ergo A D ipsi est parallela. Triangula igitur æqualia super eadem basi, & ad easdem partes constituta in eisdem quoque sunt parallelis. Quod oportebat demonstrare.



[a] 31. hujus. [b] 37. hujus. [c] Ex hyp.

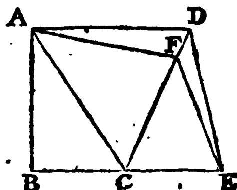
PROP. XL. THEOR.

Triangula æqualia super basibus æqualibus, & ad easdem partes constituta in eisdem quoque sunt parallelis.

Sint æqualia triangula A B C C D E super æqualibus basibus B C C E constituta. dico etiam in eisdem esse parallelis. ducatur enim A D. dico A D ipsi B E parallelam esse. Nam si non est, ducatur per A ipsi B E parallela A F, [a] & F E ducatur;

[a] 31. hujus.

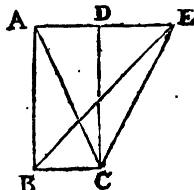
b 38. hujus. catur. triangulum igitur ABC triangulo FCE est æquale [b], cum super æqualibus basibus & in eisdem parallelis BE AF constituantur. sed triangulum ABC æquale est triangulo DCE. ergo & triangulum DCE triangulo FCE æquale erit, majus minori, quod fieri non potest. non igitur AF ipsi BE est parallela. similiter demonstrabimus neque aliam quampiam parallelam esse, præter AD. ergo AD ipsi BE parallela erit. Æqualia igitur triangula super basibus æqualibus, & ad easdem partes constituta, etiam in eisdem sunt parallelis. Quod demonstrare oportebat.



PROP. XLI. THEOR.

Si parallelogrammum, & triangulum eandem basim habeant in eisdemque sint parallelis; parallelogrammum ipsius trianguli duplum erit.

Parallelogrammum enim ABCD, & triangulum EBC, basim habeant eandem BC, & in eisdem sint parallelis BC AE. dico parallelogrammum ABCD trianguli EBC duplum esse. Jungatur enim AC. triangulum igitur ABC triangulo
a 37. hujus. EBC est æquale [a]; namque super eadem basi BC, & in eisdem BC AE parallelis constituuntur. sed ABCD parallelogrammum duplum est trian-
b 34. hujus. guli ABC [b], cum diameter AC ipsum bifariam secet. quare & ipsius EBC trianguli duplum erit. Si igitur parallelogrammum, & triangulum eandem basim habeant, & in eisdem sint parallelis; duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli. Quod demonstrare oportebat.



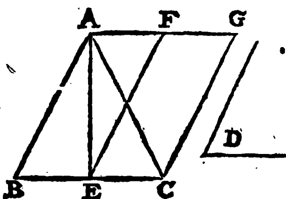
PROP. XLII. PROBL.

Dato triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

Sit datum triangulum ABC, datus autem rectilineus angulus D. Itaque oportet, dato triangulo ABC æquale parallelogrammum constituere in angulo rectilineo ipsi D æquali.

secetur

secetur BC bifariam [a] in E, & juncta AE, ad rectam lineam [a] 10. hujus.
EC, atque ad punctum in ea E, constituatur angulus [b] CEF [b] 23. hujus.
æqualis ipsi D: & per A quidem ipsi EC parallela ducatur [c] AG; per C vero ipsi FE ducatur parallela [c] CG. parallelogrammum igitur est FECG. [c] 31. hujus.
& quoniam BE est æqualis EC,

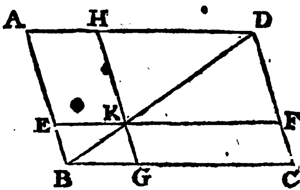


erit & ABE triangulum [d] triangulo AEC æquale, super æqualibus enim sunt basibus BE EC, & in eisdem BC AG parallelis. ergo triangulum ABC trianguli AEC est duplum. est autem, & parallelogrammum FECG duplum [e] trianguli AEC; basim enim eandem habet, & in eisdem est parallelis. æquale igitur est FECG parallelogrammum triangulo ABC habetque CEF angulum æqualem angulo D dato. Dato igitur triangulo ABC æquale parallelogrammum FECG constitutum est, in angulo CEF, qui angulo D est æqualis. Quod quidem facere oportebat. [d] 38. hujus. [e] 41. hujus.

PROP. XLIII. THEOR.

Omnis parallelogrammi spatii eorum, quæ circa diametrum sunt, parallelogrammorum complementa inter se sunt æqualia.

Sit parallelogrammum ABCD, cujus diameter BD, & circa ipsam BD parallelogramma quidem sint FH EG, quæ vero complementa dicuntur AK KC. dico AK complementum complemento KC æquale esse. Quoniam enim parallelogrammum est ABCD, & ejus diameter BD, æquale [a] est ABD triangulum triangulo BDC. rursus quoniam HKFD parallelogrammum est, cujus diameter DK, triangulum HDK triangulo DFK æquale [a] erit. eadem ratione, & triangulum [a] 34. hujus.



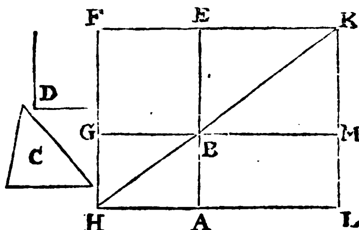
KGB triangulo KEB est æquale. cum igitur triangulum quidem BEK æquale sit triangulo BGK triangulum vero HDK ipsi DFK; erit triangulum BEK una cum triangulo HDK æquale triangulo BGK una cum DFK triangulo. est autem & totum triangulum ABD æquale toti BDC. reliquum igitur AK complementum reliquo complemento KC est æquale. Ergo omnis parallelogrammi spatii eorum, quæ

circa diametrum sunt parallelogrammorum complementa inter se æqualia sunt. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XLIV. PROBL.

Ad datam rectam lineam dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

Sit data quidem recta linea A B; datum vero triangulum C, & datus angulus rectilineus D. oportet igitur ad datam rectam lineam A B, dato triangulo C æquale parallelogrammum applicare in angulo ipsi D æquali. Constituatur triangulo C æquale [a] parallelogrammum B E F G, in angulo E B G qui est æqualis D. & ponatur B E in directum ipsi A B, producaturque F G ad H: & per A alterutri ipsarum B G E F parallela [b] ducatur A H, & H B jungatur. quoniam igitur in parallelas A H E F recta linea H F incidit, anguli A H F H F E duobus rectis æquales [c] sunt. quare B H F H F E duobus rectis sunt minores. quæ vero à minoribus, quam sunt duo recti, in infinitum producuntur, conveniunt [d] inter se. ergo H B F E productæ convenient. producantur, & convenient in K; perque K alterutri ipsarum E A F H parallela [b] ducatur K L, & A H G B ad L, M puncta producantur. parallelogrammum igitur est H L K F, cujus diameter H K, & circa H K parallelogramma quidem sunt A G M E; ea vero quæ complementa dicuntur L B B F: ergo L B ipsi B F est [e] æquale. sed, & B F æquale est triangulo C. quare, & L B triangulo C æquale erit. & quoniam G B E angulus æqualis [f] est angulo A B M, sed & æqualis angulo D, erit & angulus A B M angulo D æqualis. Ad datam igitur rectam lineam A B, dato triangulo C æquale parallelogrammum constitutum est L B, in angulo A B M, qui est æqualis angulo D. Quod facere oportebat.



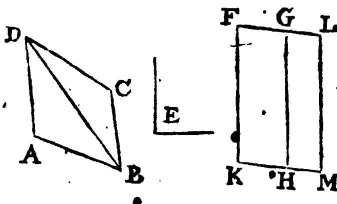
[a] 42. hujus.
[b] 31. hujus.
[c] 29. hujus.
[d] Axio. 12.
[e] 43. hujus.
[f] 15. hujus.

PROP. XLV. PROBL.

Rectilineo dato æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

Sit datum rectilineum A B C D, datus vero angulus rectilineus E. oportet rectilineo A B C D æquale parallelogrammum

mum constituere in angulo ipsi E æquali. Conjungantur enim DB, & constituatur triangulo ADB æquale [a] parallelogrammum FH: in angulo HKF, qui est æqualis angulo E. deinde ad rectam lineam GH applicetur triangulo DBC æquale [b] parallelogrammum GM, in angulo GHM qui angulo E est æqualis. & quoniam angulus E æqualis est utrique ipsorum HKF GHM, erit & HKF angulo GHM æqualis. communis apponatur KHG, anguli igitur HKF, KHG angulis KHG GHM æquales sunt. sed HKF KHG sunt æquales [c] duobus rectis. ergo, & KHG GHM duobus rectis æquales erunt. itaque ad aliquam rectam lineam GH, & ad datum in ea punctum H duæ rectæ lineæ KH HM non ad easdem partes positæ angulos deinceps duobus rectis æquales efficiunt. in directum igitur [d] est KH ipsi HM. & quoniam in parallelas KM FG recta linea HG incidit, alterni anguli MHG HGF æquales [c] sunt. communis apponatur HGL. anguli igitur MHG HGL, angulis HGF HGL sunt æquales. at anguli MHG HGL æquales [c] sunt duobus rectis. quare & anguli HGF HGL duobus rectis æquales erunt. in directum [d] igitur est FG ipsi GL. & quoniam KF ipsi HG & æqualis est, & parallela, sed & HG ipsi ML; erit KF [e] ipsi ML & æqualis, & parallela. ipsasque conjungunt rectæ lineæ KM FL. ergo & KM FL æquales [f] & parallelæ sunt. parallelogrammum igitur est KFLM. at cum triangulum quidem ABD æquale sit parallelogrammo HF: triangulum vero DBC parallelogrammo GM; erit totum ABCD rectilineum toti parallelogrammo KFLM æquale. Dato igitur rectilineo ABCD æquale parallelogrammum constitutum est KFLM in angulo FKM, qui est æqualis angulo E dato. Quod facere oportebat.



[a] 42. hujus.
[b] 44. hujus.
[c] 29. hujus.
[d] 14. hujus.
[e] 30. hujus.
[f] 35. hujus.

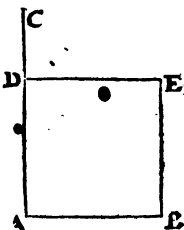
Cor. Ex jam dictis manifestum est, quomodo ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare possit in dato angulo rectilineo.

PROP. XLVI. PROBL.

Super data recta linea quadratum describere.

Sit data recta linea AB. oportet super ipsa AB quadratum descri-

a 11. hujus. describere. Ducatur [a] rectæ lineæ AB à puncto in ea dato
b 3. hujus. A ad rectos angulos AC; & ipsi AB æqualis [b] ponatur AD; perque punctum D ducatur [c] DE ipsi AB parallela, & per B
c 31. hujus. ipsi AD parallela [c] ducatur BE. parallelogrammum igitur est ADEB. & AB quidem est [d] æqualis DE,
d 34. hujus. AD vero ipsi [d] BE. sed BA ipsi AD est æqualis. quatuor igitur BA AD DE EB inter se æquales sunt, ideoque æquilaterum est ADEB parallelogrammum. dico etiam rectangulum esse. quoniam enim in parallelas AB DE recta linea incidit AD,
e 29. hujus. anguli BAD ADE duobus rectis sunt [e] æquales. rectus autem est BAD, ergo, & ADE rectus erit. parallelogrammorum vero spatiorum, quæ ex opposito sunt latera,
f 34. hujus. & anguli [f] inter se æqualia sunt. rectus igitur est uterque oppositorum ABE BED angulorum: & ob id rectangulum est ADEB. Ostensum autem est æquilaterum esse. Quadratum igitur sit necesse est, atque est super recta linea AB descriptum. Quod ipsum facere oportebat.

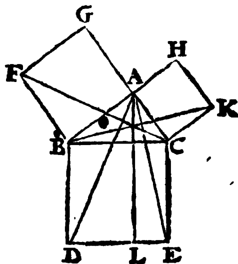


Cor. Hinc omne parallelogrammum habens unum angulum rectum est rectangulum.

PROP. XLVII. THEOR.

In rectangulis triangulis, quod à latere rectum angulum subtendente describitur, quadratum æquale est quadratis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens BAC angulum. dico quadratum descriptum à recta BC æquale esse quadratis, quæ ab ipsis BA AC describuntur. describatur [a] enim à BC quidem quadratum BDEC, ab ipsis
a 46. hujus. BA AC quadrata [a] GB HC, perque A alterutri ipsarum BD CE parallela ducatur AL; & AD FC jungantur. Quoniam igitur uterque angulorum BAC
b Def. 30. BAG rectus [b] est, ad aliquam rectam lineam BA, & ad datum in ea punctum A duæ rectæ lineæ AC AG non ad easdem partes positæ, angulos qui deinceps sunt duobus rectis æquales
c 14. hujus. efficiunt. in directum igitur [c] est CA ipsi AG. eadem ratione, & AB ipsi AH est in directum. & quoniam angulus



DBC

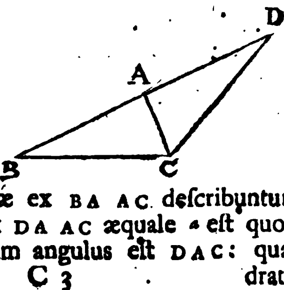
DBC est æqualis angulo FBA, rectus enim uterque est, communis apponatur ABC, totus igitur DBA angulus toti FBC est *d* æqualis. quòd cum duæ AB BD duabus FB BC æquales *d* sint, altera alteri, & angulus DBA æqualis angulo FBC; erit & basis AD basi FC æqualis *e*, & ABD triangulum triangulo FBC æquale. estque *f* trianguli quidem ABD duplum BL parallelogrammum, basim enim eandem habent BD, & in eisdem BD AL sunt parallelis: trianguli *f* vero FBC duplum est GB quadratum, rursus enim basim habent eandem FB, & in eisdem sunt parallelis FB GC. quæ autem æqualium duplicia inter se æqualia *g* sunt. ergo æquale est parallelogrammum BL ipsi GB quadrato. similiter junctis AE BK, ostendetur etiam CL parallelogrammum æquale quadrato HC. totum igitur BDEC quadratum duobus quadratis GB HC est æquale. & describitur quidem DBEC quadratum à recta linea BC, quadrata vero GB HC ab ipsis BA AC. quadratum igitur BE, à latere BC descriptum æquale est quadratis, quæ describuntur à lateribus BA AC. Ergo in rectangulis triangulis, quadratum, quod describitur à latere rectum angulum subtendente æquale est quadratis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur. Quod oportebat demonstrare.

d Axiom. 2.
e 4. hujus.
f 41. hujus.
g Axiom. 6.

PROP. XLVIII. THEOR.

Si quadratum, quod describitur ab uno laterum trianguli, æquale sit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur; angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit.

Si trianguli ABC, quod ab uno latere BC describitur quadratum æquale sit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus BA AC describuntur, dico angulum BAC rectum esse. ducatur enim à puncto A ipsi AC ad rectos angulos AD; ponaturque AD ipsi BA æqualis, & DC jungatur. Quoniam igitur DA est æqualis AB, erit & quadratum quod describitur ex DA æquale quadrato ex AB commune apponatur quadratum, quod ex AC. ergo quadrata, quæ ex DA AC æqualia sunt quadratis quæ ex BA AC describuntur. sed quadratis quidem, quæ ex DA AC æquale *a* est quod ex DC quadratum; rectus enim angulus est DAC: quadratis



a 47. hujus.

dratis vero, quæ ex BA AC æquale ponitur quadratum, quod ex BC: quadratum igitur, quod ex DC æquale est ei, quod ex BC quadrato. ergo & latus DC lateri CB est æquale. & quoniam DA est æqualis AB, communis autem AC, duæ DA AC æquales sunt duabus BA AC; & basis DC est æ-

b 8. hujus. qualis basi CB. angulus [b] igitur DAC angulo BAC erit æqualis. rectus autem est DAC. ergo & BAC rectus erit. Si igitur quadratum quod describitur ab uno laterum trianguli, æquale sit quadratis quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur, angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit. Quod oportebat demonstrare.

EUCLIDIS

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER SECUNDUS.

DEFINITIONES.

I.

OMNE parallelogrammum rectangulum contineri dicitur sub duabus rectis lineis, quæ rectum angulum comprehendunt.

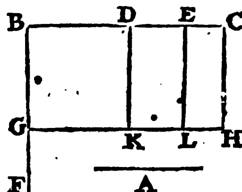
II.

Omnis parallelogrammi spatii, unumquodvis eorum quæ circa diametrum ipsis sunt parllelogrammorum, cum duobus complementis, gnomon vocetur.

PROPOSITIO I. THEOREMA.

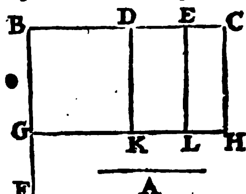
Si sint duæ rectæ lineæ, altera autem ipsarum secta fuerit in quotcunque partes; rectangulum sub duabus rectis lineis contentum æquale est eis rectangulis, quæ sub recta linea insecta, & singulis partibus continentur.

Sint duæ rectæ lineæ A, BC; & secta sit BC utcunque in punctis D, E. dico rectangulum rectis lineis A, BC contentum æquale esse rectangulo quod continetur sub A & BD, & rectangulo quod sub A & DE, & ei quod sub A & EC continetur. Ducatur enim à puncto B ipsi BC ad rectos [a] angulos BF: atque ipsi A ponatur [b] æqualis BG: & per G quidem



[a] 11. primi.
[b] 3. primi.

c 31. primi. quidem ipsi BC parallela c ducatur GH: per D, E, C vero ducantur DK EL CH parallelæ c ipsi BG. rectangulum igitur BH est æquale rectangulis BK DL EH: atque est BH quidem quod sub A & BC continetur; etenim continetur sub GB BC; & BG ipsi A est æqualis; rectangulum autem BK est quod continetur sub ipsis A & BD; continetur enim sub GB BD, quarum GB est æqualis A; & rectangulum DL est quod continetur sub A & DE, quoniam DK, hoc est BG ipsi A est æqualis; & similiter rectangulum EH est quod sub A & EC continetur. ergo rectangulum contentum sub A & BC est æquale rectangulo contento sub A & BD, & contento sub A & DE, & adhuc contento sub A & EC. Si igitur sint duæ rectæ lineæ, altera autem ipsarum secta fuerit in quotcunque partes; rectangulum sub duabus rectis lineis contentum est æquale eis quæ sub recta linea insecta, & singulis partibus, continentur. Quod oportebat demonstrare.

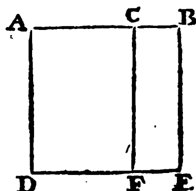


PROP. II. THEOR.

Si recta linea secta fuerit utcunque; rectangula quæ sub tota, & singulis partibus continentur, æqualia sunt ei quod à tota fit quadrato.

Recta enim linea AB secta sit utcunque in puncto C, dico rectangulum quod sub AB BC continetur, unà cum contento sub AB AC æquale esse quadrato, quod fit ex AB.

a 46. primi. describatur a enim ex AB quadratum ADEB, & per C du-
b 31. primi. catur b alterutri ipsarum AD BE parallela GF. æquale igitur est AE rectangulis AF CE. atque est AE quidem quadratum, quod ex AB; AF vero rectangulum contentum sub BA AC; etenim sub DA AC continetur, quarum AD ipsi AB est æqualis; & rectangulum CE continetur sub AB BC, cum BE sit æqualis AB. ergo rectangulum sub AB & AC unà cum rectangulo sub AB & BC æquale est quadrato ex AB. Si igitur recta linea utcunque secta fuerit, rectangula, quæ sub tota & singulis partibus continentur, æqualia sunt ei, quod à tota fit quadrato. Quod demonstrare oportebat.



PROP.

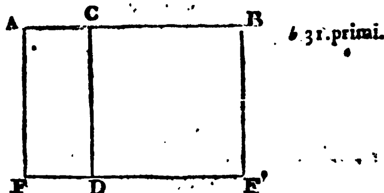
PROP. III. THEOR.

Si recta linea utcunque secta fuerit; rectangulum sub tota, & una ejus parte contentum æquale est & rectangulo, quod sub partibus continetur, & ei quod à prædicta parte fit quadrato.

Recta enim linea A B secta sit utcunque in puncto C. dico sub A B & B C rectangulum æquale esse rectangulo sub A C B C unà cum quadrato, quod fit ex B C. describatur [a] enim ex B C quadratum C D E B; producaturque E D in F: & per A alterutri ipsarum C D B E parallela [b] ducatur A F. æquale utique erit rectanctulum A E ipsis A D C E: & est A E quidem rectangulum contentum sub A B B C; etenim sub A B B E continetur, quarum B E est æqualis B C: rectangulum vero A D est quod continetur sub A C C B, cum D C ipsi C B sit æqualis: & D B est quadratum, quod fit ex B C. ergo rectangulum sub A B B C est æquale rectangulo sub A C C B unà cum quadrato quod ex B C. Si igitur recta linea utcunque secta fuerit; rectangulum sub tota, & una ejus parte contentum æquale est rectangulo quod sub partibus continetur, & ei quod à prædicta parte fit quadrato.

[a] 46. primi.

[b] 31. primi.



PROP. IV. THEOR.

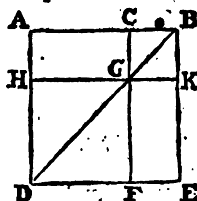
Si recta linea secta fuerit utcunque; quadratum quod fit à tota æquale erit, & quadratis quæ à partibus fiunt, & ei quod bis sub partibus continetur rectangulo.

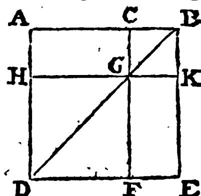
Recta enim linea A B secta sit utcunque in C. dico quadratum quod fit ex A B æquale esse, & quadratis ex A C C B & ei rectangulo quod bis sub A C C B continetur. Describatur [a] enim ex A B quadratum A D E B, jungaturque B D, & per C quidem alterutri ipsarum A D B E parallela [b] ducatur C G F; per G vero alterutri ipsarum A B D E ducatur [b] parallela H K. & quoniam C F est parallela ipsi A D, & in ipsas incidit B D: erit exterior angulus B G C interiori & opposito A D B æqualis [c]: angulus

[a] 46. primi.

[b] 41. primi.

[c] 29. primi.



d 5. primi. angulus autem ADB est æqualis d angulo ABD, quod & latus BA æquale est lateri AD. quare CGB angulus angulo
e 6. primi. GBC est æqualis: ac propterea latus BC lateri CG æquale e.
f 34. primi. sed & latus CB æquale f est lateri GK & CG ipsi BK. ergo & GK est æquale KB, & CGKB æquilaterum est. dico insuper etiam rectangulum esse. quoniam enim CG est parallela ipsi BK & in ipsas incidit CB; anguli KBC GCB duobus rectis sunt æquales c. rectus autem est KBC angulus. ergo & rectus GCB, & anguli oppositi CGK GKB recti erunt. rectangulum igitur est CGKB. sed ostensum fuit & æquilaterum esse, quadratum igitur est CGKB, quod quidem fit ex BC. eadem ratione & HF est quadratum quod fit ex HG, hoc est ex AC. ergo HF CK ex ipsis AC CB quadrata sunt. &


g 43. primi. quoniam rectangulum AG est æquale g rectangulo GE; atque est AG quod sub AC CB continetur, est enim GC ipsi CB æqualis: erit & GE æquale ei quod continetur sub AC CB, quare rectangula AG GE æqualia sunt ei quod bis sub AC CB continetur. sunt autem & HF CK quadrata ex AC CB. quatuor igitur HF CK AG GE, & quadratis ex AC CB, & ei quod bis sub AC CB continetur rectangulo, sunt æqualia; sed HF CK, AG GE componunt totum ADEB quadratum quod fit ex AB. quadratum igitur ex AB æquale est & quadratis ex AC CB, & ei quod bis sub AC CB continetur rectangulo. Quare si recta linea utcunque secta fuerit; quadratum quod fit à tota æquale erit & quadratis quæ à partibus fiunt, & ei rectangulo quod bis sub partibus continetur. atque illud est quod demonstrare oportebat.

Cor. Ex hoc perspicue constat, in quadratis spatiis parallelogramma quæ sunt circa diametrum, quadrata esse.

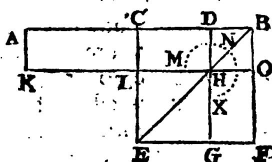
PROP. V. THEOR.

Si recta linea secta fuerit in partes æquales, & in partes inæquales; rectangulum sub inæqualibus totius partibus contentum una cum quadrato lineæ quæ inter sectiones interjicitur, æquale est ei quod à dimidia fit quadrato.

Recta enim linea quævis AB secta sit in partes æquales ad punctum C, & in partes inæquales ad D, dico rectangulum contentum sub AD DB, una cum quadrato quod fit ex

CD

CD æquale esse ei quod ex CB fit quadrato. Describatur [a] enim [a 46.primi.] ex BC quadratum CEFB: ducaturque BE: & per D quidem alterutri ipsarum CE BF parallela [b] ducatur DHG; per [b 31.primi.] H vero ducatur ALK parallela [b] alterutri ipsarum CB EF: & rursus per A ducatur alterutri CL BO parallela [b] AK. & quoniam CH complementum æquale [c] est complemento HF; [c 43.primi.] commune apponatur DO, totum igitur CO toti DF est æquale. sed CO est æquale [d] AL, [d 43.primi.] quoniam & AC ipsi CB. ergo & AL æquale est DF. commune apponatur CH. totum igitur AH ipsis FD DL æquale erit. sed AH quidem est quod sub AD DB continetur, etenim DH ipsi DB est æqualis [e]; FD DL vero est gnomon MNX. igitur MNX æqualis est ei [e Cor. 4. hujus.] quod sub AD DB continetur, commune apponatur LG, æquale [e] scilicet quadrato quod ex CD, ergo MNX gnomon, & LG æqualia sunt rectangulo, quod continetur sub AD DB, & ei, quod fit ex CD quadrato. sed MNX gnomon, & LG sunt totum quadratum CBFB, quod quidem fit ex CB. ergo rectangulum sub AD DB, una cum quadrato quod ex CD, æquale est ei quod ex CB fit quadrato. Si igitur recta linea secta fuerit in partes æquales, & in partes inæquales; rectangulum sub inæqualibus totius partibus contentum unà cum quadrato lineæ quæ inter sectiones interjicitur, æquale est ei quod à dimidia fit quadrato. Quod demonstrare oportebat.



PROP. VI. THEOR.

Si recta linea bifariam secetur, atque ipsi in directum adjiciatur quædam recta linea; rectangulum sub tota cum adjecta, & adjecta contentum, unà cum quadrato dimidiæ, æquale est quadrato quod ab ea, quæ ex dimidia, & adjecta constat, tanquam ab una linea describitur.

Recta enim linea quævis AB secetur bifariam in puncto C, & adjiciatur ipsi in directum BD. dico rectangulum sub AD DB unà cum quadrato ex BC æquale esse ei quod fit ex CD quadrato. Describatur [a] enim ex CD quadratum CEFD, [a 46.primi.] & jungatur DE; per B alterutri ipsarum CE DF parallela [b] ducatur BHG; & per H ducatur KLM parallela [b] [b 31.primi.] alterutri

alterutri ipsarum A D E F; & adhuc per A alterutri C L D M parallela [b] A K. Itaque quoniam A C est æqualis C B, erit & rectangulum A L rectangulo
c 36.primi. C H æquale [c]. sed C H æquale
d 43.primi. [d] est H F. ergo & A L ipsi H F æquale erit. commune apponatur C M. totum igitur A M gnomoni N X O est æquale. atque est A M, quod sub A D D B
e Cor. 4. hujus. continetur, etenim D M est [e] æqualis D B. ergo & gnomon N X O æqualis est rectangulo sub A D D B. rursus commune apponatur L G, æquale [e] scilicet quadrato quod ex C B. rectangulum igitur sub A D D B unà cum quadrato quod ex B C æquale est gnomoni N X O & ipsi L G. sed gnomon N X O, & L G componunt C E F D quadratum, quod quidem fit ex C D. ergo rectangulum sub A D D B unà cum quadrato ex B C æquale est ei, quod fit ex C D quadrato. Si igitur recta linea secetur bifariam, adjiciaturque ipsi in directum quædam recta linea; rectangulum sub tota cum adjecta, & adjecta contentum, unà cum quadrato dimidiæ, æquale est quadrato quod ab ea, quæ ex dimidia & adjecta constat, tanquam ab una linea describitur. Quod oportebat demonstrare.

PROP. VII. THEOR.

Si recta linea utcunque secta fuerit; quæ à tota, & una parte fiunt utraque quadrata æqualia sunt, & rectangulo, quod bis sub tota, ac dicta parte continetur, & ei quod à reliqua parte fit quadrato.

Recta enim linea quædam A B secta sit utcunque in puncto C. dico quadrata ex A B B C æqualia esse, & rectangulo quod bis sub A B B C continetur, & ei quod fit ex A C quadrato. De-
a 46.primi. scribatur [a] enim ex A B quadratum A D E B, & figura construatur *. Itaque quoniam A G rect-
b 43.primi. angulum æquale [b] est rectangulo

* *Figura dicitur construi, cum in parallelogrammo ductæ lineæ lateribus parallelæ secantes diametrum in uno puncto, efficiunt duo parallelogramma circa diametrum, & duo complementa. Similiter dupla figura dicitur construi, cum ductæ rectæ lateribus parallelæ, efficiunt quatuor parallelogramma circa diametrum, & quatuor complementa.*

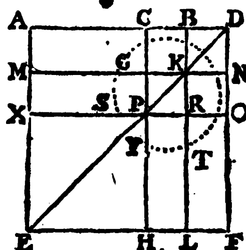
G E,

GE, commune apponatur CF; quare totum AF toti CE est æquale. rectangula igitur AF CE dupla sunt rectanguli AF. sed AF CE sunt LKM gnomon, & quadratum CF; ergo KLM gnomon, & quadratum CF dupla erunt rectanguli AF. est autem id, quod bis sub AB BC continetur, duplum ipsius AF; etenim BF est c æqualis BC. gnomon igitur KLM, & quadratum CF æqualia sunt ei quod bis sub AB BC continetur. commune apponatur HF, quod est ex AC quadratum. ergo gnomon KLM, & quadrata CF HF æqualia sunt ei quod bis sub AB BC continetur, & quadrato ex AC. sed gnomon KLM, & quadrata CF HF componunt ADEB, & CF, quæ sunt ex AB BC quadrata. quadrata igitur ex AB BC æqualia sunt rectangulo, quod bis sub AB BC continetur unà cum eo quod fit ex AC quadrato. Ergo si recta linea utcunque secta fuerit; quæ a tota, & una parte fiunt, utraque quadrata æqualia sunt rectangulo quod bis sub tota, ac dicta parte continetur, & ei quod à reliqua parte fit quadrato. quod ostendere oportebat. c Cor. 4. hujus.

PROP. VIII. THEOR.

Si recta linea utcunque secta fuerit; quod quater sub tota, & una parte continetur rectangulum unà cum quadrato reliquæ partis, æquale est quadrato quod ex tota, & dicta parte tanquam ex una linea describitur.

Recta enim linea AB secta sit utcunque in C. dico rectangulum quater sub AB BC contentum unà cum quadrato quod ex AC æquale esse quadrato, quod ex AB BC tanquam ex una linea describitur. Producatur enim recta linea AB in D; & ipsi CB ponatur æqualis BD; describaturque ex AD quadratum AEFD; & dupla figura construatur. quoniam igitur CB est a æqualis BD, atque est CB ipsi GK æqualis b; BD vero ipsi KN: erit & GK æqualis KN. eadem ratione, & PR ipsi RO est æqualis. & quoniam CB est æqualis BD, & GK ipsi KN; erit rectangulum c quidem CK rectangulo BN; rectangulum vero GR ipsi RN æquale c. sed CK est d æquale RN, complementa enim sunt parallelogrammi CO, ergo & BN æquale est GR, & quatuor



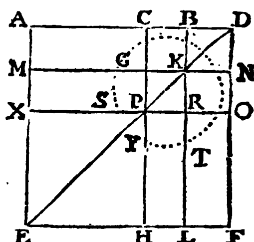
a hyp.
b 34. primi.
c 36. primi.
d 43. primi.

rectan-

rectangula BN KC GR RN inter se æqualia; ideoque quadrupla sunt rectanguli CK. rursus quoniam CB est æqualis BD, & BD quidem ipsi BK, hoc est ipsi CG æqualis; CB vero ipsi GK, hoc est GP: erit & CG æqualis GP. est autem & PR ipsi RO æqualis. rectangulum igitur AG rectangulo MP, & rectangulum PL ipsi RF æquale erit. sed MP est æquale PL, complementa enim sunt ML parallelogrammi; quare & AG ipsi RF est æquale. quatuor igitur AG MP PL RF inter se æqualia sunt, ac propterea ipsius AG quadrupla. ostensum autem est, & quatuor CK BN GR RN quadrupla esse CK. quare octo continentia gnomonem STY ipsius AK quadrupla sunt, & quoniam AK est quod sub AB BC continetur; etenim BK est æqualis BC; erit contentum quater sub AB BC ipsius AK quadruplum. at demonstratus est gnomon STY quadruplus ipsius AK. quod igitur quater sub AB BC continetur æquale est gnomoni STY. commune apponatur XH, quod quidem quadrato ex AC est e æquale. ergo quod quater sub AB BC continetur una cum quadrato ex AC æquale est ipsi STY gnomoni, & quadrato XH. sed STY gnomon, & XH totum sunt AEFD quadratum, quod describitur ex AD. rectangulum igitur quater sub AB BC contentum unà cum quadrato ex AC æquale est ei, quod ex AD, hoc est ex AB BC tanquam ex una linea describitur, quadrato. Ergo si recta linea utcunque secta fuerit; quod quater sub toto, & una parte continetur rectangulum, unà cum quadrato reliquæ partis, æquale est quadrato, quod ex tota & dicta parte, tanquam ex una linea describitur. Quod ostendendum fuerat.

d 43. primi.

e Cor. 4. hujus.



PROP. IX. THEOR.

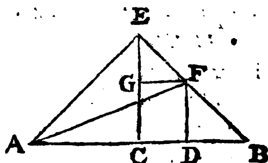
Si recta linea in partes æquales, & in partes inæquales secta fuerit; quadrata quæ ab inæqualibus totius partibus describuntur, dupla sunt & quadrati dimidiæ, & quadrati lineæ ejus quæ inter sectiones interjicitur.

Recta enim linea quævis AB secta sit in partes æquales ad C, & in partes inæquales ad D. dico quadrata ex AD DB, quadratorum ex AC CD dupla esse. Ducatur a enim à puncto C ipsi AB ad rectos angulos CE, & utrivis ipsarum

a 11. primi.

AC

AC CB æqualis ponatur, junganturque EA EB. ac per D quidem ipsi CE parallela [b] ducatur DF; per F vero ipsi AB parallela [b] FG; & AF ducatur. Itaque quoniam AC est æqualis CE; erit [c] & angulus EAC angulo AEC æqualis. & cum rectus sit angulus ad C, reliqui AEC EAC uni recto æquales [d] erunt. & sunt æquales inter sese. utervis igitur ipsorum AEC EAC recti est dimidium. eadem ratione, & recti dimidium est utervis ipsorum CEB EBC. ergo totus angulus AEB rectus est. & quoniam angulus GEF dimidium est recti, rectus autem EGF, æqualis enim [e] est interiori & opposito ECB, erit, & reliquus EFG recti dimidium: æqualis igitur est GEF angulus ipsi EFG. quare & latus EG lateri GF est [f] æquale. rursus quoniam angulus ad B dimidium est recti, rectus autem FDB, quòd sit æqualis interiori & opposito ECB; reliquus BFD recti erit dimidium. angulus igitur ad B æqualis est angulo BFD; ideoque latus DF lateri DB æquale. & quoniam AC est æqualis CE, erit & ex AC quadratum æquale quadrato ex CE. quadrata igitur ex AC CE dupla sunt quadrati ex AC; quadratis autem ex AC CE æquale [g] est quadratum ex EA, siquidem rectus est angulus ACE. ergo quadratum ex EA quadrati ex AC est duplum. rursus quoniam EG æqualis est GF, & quadratum ex EG quadrato ex GF est æquale. quadrata igitur ex EG & GF dupla sunt quadrati ex GF. at quadratis ex EG GF æquale [g] est quod ex EF quadratum. ergo quadratum ex EF quadrati ex GF duplum erit. æqualis [h] autem est GF ipsi CD. quadratum igitur ex EF duplum est quadrati CD. sed & quadratum ex AE quadrati ex AC est duplum. ergo quadrata ex AE EF dupla sunt quadratorum ex AC CD. quadratis vero ex AE EF æquale [g] est ex AF quadratum; quoniam angulus AEF rectus est. quadratum igitur ex AF quadratorum ex AC CD est duplum. sed quadrato ex AF æqualia sunt ex AD DF quadrata. rectus enim est angulus qui ad D. ergo ex AD DF quadrata dupla sunt quadratorum ex AC CD. est autem DF ipsi DB æqualis. quadrata igitur ex AD DB quadratorum ex AC CD dupla erunt. Quare si recta linea in partes æquales, & in partes inæquales secta fuerit; quæ ab inæqualibus totius partibus describuntur quadrata, dupla sunt & quadrati dimidiæ, & quadrati lineæ ejus quæ inter sectiones interjicitur. Quod ostendere oportebat.



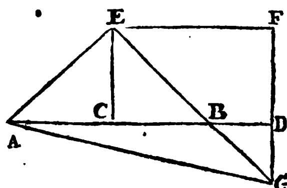
[b] 31. primi.
[c] 5. primi.
[d] 3. Cor. 32. primi.
[e] 29. primi.
[f] 6. primi.
[g] 47. primi.
[h] 34. primi.

PROP.

PROP. X. THEOR.

Si recta linea secetur bifariam, & ipsi in directum quævis recta linea adjiciatur; quæ à tota cum adjecta, & adjecta fiunt utraque quadrata, dupla sunt & quadrati dimidiæ, & quadrati quod ab ea, quæ ex dimidia, & adjecta constat, tanquam ab una linea describitur.

Recta enim linea A B secetur bifariam in C, & ipsi in directum adjiciatur quævis recta linea B D. dico quadrata ex A D D B quadratorum ex A C C D dupla esse. Ducatur enim à
a 11. primi. puncto C ipsi A B ad rectos [a] angulos C E, & utrivis ipsarum A C C B æqualis ponatur; ducaturque A E E B, & per E qui-
b 31. primi. dem ipsi A D parallela [b] ducatur E F; per D vero ducatur D F parallela [b] ipsi C E. & quoniam in parallelas E C F D recta
c 29. primi. quædam linea E F incidit, anguli C E F E F D æquales [c] sunt duobus rectis. anguli igitur F E B E F D duobus rectis sunt minores. quæ autem à minoribus quam sunt duo recti in infinitum producuntur, con-
d Axio. 12. veniunt inter se [d]. ergo E B F D productæ ad partes B D convenient. producantur, &



conveniant in puncto G, & A G ducatur. itaque quoniam A C est æqualis C E, & angulus A E C angulo E A C æqualis
e 5. primi. [e] erit: atque est rectus qui ad C. uterque igitur ipsorum C A E A E C est recti dimidium. eadem ratione, & recti dimidium est uterque C E B E B C. ergo A E B est rectus. &
f 15. primi. quoniam E B C est dimidium recti, erit & recti [f] dimidium D B G; cum sit ad verticem. sed & B D B rectus est; etenim est [c] æqualis ipsi D C E alterno. reliquus igitur D G B dimidium est recti, & ob id ipsi D B G æqualis. ergo & latus B D
g 6. primi. æquale [g] lateri D G. rursus quoniam E G F est dimidium recti, rectus autem qui ad F, est enim angulo opposito qui ad C æqualis; erit, & reliquus F E G recti dimidium, & æqualis ipsi E G F. quare & latus G F lateri E F est æquale [g]. & cum E C sit æqualis C A; & quadratum ex E C æquale est ei quod ex C A fit quadrato. ergo quadrata ex E C C A dupla
h 47. primi. sunt quadrati ex C A. quadratis autem ex E C C A æquale [h] est quadratum ex E A. quadratum igitur ex E A quadrati ex A C est duplum. rursus quoniam G F est æqualis F E, æquale est, & ex G F quadratum quadrato ex F E. quadrata igitur ex G F F E quadrati ex E F sunt dupla. at quadratis ex G F F E æquale est

est [b] quod ex E G quadratum. ergo quadratum ex E G duplum est quadrati ex E F. æqualis autem est E F ipsi C D. quadratum igitur ex E G quadrati ex C D duplum erit. sed ostensum est quadratum ex E A duplum quadrati ex A C. ergo ex A E E G quadrata, quadratorum ex A C C D sunt dupla. quadratis vero ex A E E G æquale est [b] quod ex A G quadratum. quadratum igitur ex A G duplum est quadratorum ex A C C D. at quadrato ex A G æqualia [b] sunt ex A D D G quadrata. ergo quadrata ex A D D G sunt dupla quadratorum ex A C C D. sed D G est æqualis D B. quadrata igitur ex A D D B quadratorum ex A C C D sunt dupla. Ergo si recta linea bifariam secetur, & ipsi in directum quædam recta linea adjiciatur; quæ à tota cum adjecta, & adjecta fiunt utraque quadrata, dupla sunt & quadrati dimidiæ, & quadrati quod ab ea quæ ex dimidia & adjecta constat tanquam ab una linea describitur. Quod ostendere oportebat. [b] 47. primi.

PROP. XI. THEOR.

Datam rectam lineam secare, ita ut quod sub tota, & altera parte continetur rectangulum æquale sit ei, quod à reliqua parte fit, quadrato.

Sit data recta linea A B. oportet ipsam A B ita secare, ut quod sub tota, & altera parte continetur rectangulum æquale sit ei, quod à reliqua parte fit, quadrato. Describatur [a] enim ex A B quadratum A B C D, seceturque A C bifariam in E, & B E ducatur: deinde producta C A in F, ponatur ipsi B E æqualis E F: describaturque ex A F quadratum F G H A, & G H ad K producatur. dico A B sectam esse in H, ita ut sub A B B H rectangulum æquale sit quadrato ex A H. Quoniam enim recta linea A C bifariam secatur in E, adjiciturque ipsi in directum A F, rectangulum sub C F F A, una cum quadrato ex A E, æquale [b] erit quadrato ex E F. sed E F est æqualis E B. rectangulum igitur sub C F F A, una cum quadrato ex A E æquale est ei, quod fit ex E B, quadrato. quadrato autem ex E B æqualia sunt [c] quadrata ex B A A E: etenim angulus ad A rectus est. ergo rectangulum sub C F F A, una cum quadrato ex A E æquale est quadratis ex A B A E; commune auferatur quod ex A E fit quadratum; reliquum igitur rectangulum sub C F F A æquale est quadrato ex A B. est autem rectangulum F K sub

[a] 46. primi.

[b] 6. hujus.

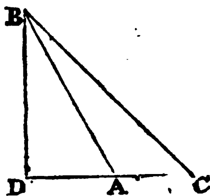
[c] 47. primi.

CF FA; siquidem AF est æqualis FG; quadratum autem ex AB est ipsum AD. rectangulum igitur FK æquale est quadrato AD. commune auferatur AK. ergo reliquum FH reliquo HD est æquale. atque est HD rectangulum sub AB BH, cum AB sit æqualis BD, & FH est quadratum ex AH. rectangulum igitur sub AB BH quadrato ex AH æquale erit. Quare data recta linea AB secta est in H, ita ut sub AB BH rectangulum quadrato ex AH sit æquale. Quod facere oportebat.

PROP. XII. THEOR.

In obtusangulis triangulis, quod à latere obtusum angulum subtendente fit quadratum, majus est quam quadrata, quæ fiunt à lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo contento bis sub uno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod scilicet protractum perpendicularis cadit, & linea assumpta exterius à perpendiculari ad angulum obtusum.

Sit obtusangulum triangulum ABC, obtusum angulum habens BAC: & ducatur [a] à puncto B ad CA protractam perpendicularis BD. dico quadratum ex BC majus esse, quam quadrata ex BA AC, rectangulo quod bis sub CA AD continetur. Quoniam enim recta linea CD secta est utcunque in puncto A, erit quadratum ex CD æquale [b], & quadratis ex CA AD, & ei, quod bis sub CA AD continetur, rectangulo. commune apponatur ex DB quadratum. quadrata igitur ex CD DB æqualia sunt & quadratis ex CA AD DB, & rectangulo quod bis sub CA AD continetur. sed quadratis ex CD DB æquale est [c] quadratum ex CB, rectus enim est angulus ad D, cum sit BD perpendicularis. quadratis vero ex AD DB æquale est [c] quadratum ex AB. Quadratum igitur ex CB æquale est, & quadratis ex CA AB, & rectangulo bis sub CA AD contento. ergo quadratum ex CB majus est quam quadrata ex CA AB, rectangulo, quod bis sub CA AD continetur. In obtusangulis igitur triangulis, quadratum, quod fit à latere obtusum angulum subtendente, majus est quam quadrata, quæ fiunt à lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo contento bis sub uno laterum, quæ sunt circa obtusum



a 12. primi.
b 4. hujus.
c 47. primi.

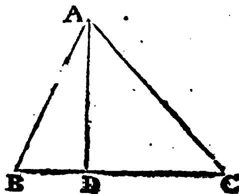
sum

sum angulum, in quod protractum perpendicularis cadit, & linea assumpta exterius à perpendiculari ad angulum obtusum. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XIII. THEOR.

In acutangulis triangulis, quod à latere acutum angulum subtendente fit quadratum, minus est quam quadrata quæ fiunt à lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis sub uno laterum, quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & linea à perpendiculari intus assumpta ad angulum acutum.

Sit acutangulum triangulum A B C, acutum habens angulum ad B: ducatur à puncto A [a] ad B C perpendicularis A D. dico quadratum quod fit ex A C minus esse quam quadrata quæ ex C B B A fiunt, rectangulo quod bis sub C B B D continetur. Quoniam enim recta linea C B secta est utcunque in D, erunt quadrata ex C B B D æqualia [b], & rectangulo quod bis sub C B B D continetur, & quadrato ex D C. commune apponatur ex A D quadratum. quadrata igitur ex C B B D D A æqualia sunt, & rectangulo bis sub C B B D contento, & quadratis ex A D D C. sed quadratis ex B D D A æquale est [c] ex A B quadratum; rectus enim angulus est qui ad D. quadratis vero ex A D D C æquale [c] est quadratum ex A C, quadrata igitur ex C B B A sunt æqualia quadrato ex A C, & ei quod bis sub C B B D continetur rectangulo. quare solum quadratum ex A C minus est quam quadrata ex C B B A, rectangulo quod bis sub C B B D continetur. In acutangulis igitur triangulis quadratum quod à latere acutum angulum subtendente fit, minus est quam quadrata quæ fiunt à lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis sub uno laterum quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & linea à perpendiculari intus assumpta ad angulum acutum. Quod demonstrare oportebat.



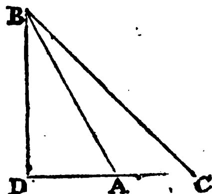
[a] 12. primi.
[b] 7. hujus.
[c] 47. primi.

CF FA; siquidem AF est æqualis FG; quadratum autem ex AB est ipsum AD. rectangulum igitur FK æquale est quadrato AD. commune auferatur AK. ergo reliquum FH reliquo HD est æquale. atque est HD rectangulum sub AB BH, cum AB sit æqualis BD, & FH est quadratum ex AH. rectangulum igitur sub AB BH quadrato ex AH æquale erit. Quare data recta linea AB secta est in H, ita ut sub AB BH rectangulum quadrato ex AH sit æquale. Quod facere oportebat.

PROP. XII. THEOR.

In obtusangulis triangulis, quod à latere obtusum angulum subtendente fit quadratum, majus est quam quadrata, quæ fiunt à lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo contento bis sub uno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod scilicet protractum perpendicularis cadit, & linea assumpta exterius à perpendiculari ad angulum obtusum.

Sit obtusangulum triangulum ABC, obtusum angulum
a 12. primi. habens BAC: & ducatur a à puncto B ad CA protractam perpendicularis BD. dico quadratum ex BC majus esse, quam quadrata ex BA AC, rectangulo quod bis sub CA AD continetur. Quoniam enim recta linea CD secta est utcunque in puncto A, erit quadratum ex
b 4. hujus. CD æquale b, & quadratis ex CA AD, & ei, quod bis sub CA AD continetur, rectangulo. commune apponatur ex DB quadratum. quadrata igitur ex CD DB æqualia sunt & quadratis ex CA AD DB, & rectangulo quod bis sub CA AD continetur. sed quadratis ex CD DB æquale est c quadratum ex CB, rectus enim est angulus ad D, cum sit BD perpendicularis. quadratis vero ex AD DB æqua-
c 47. primi. le est c quadratum ex AB. Quadratum igitur ex CB æquale est, & quadratis ex CA AB, & rectangulo bis sub CA AD contento. ergo quadratum ex CB majus est quam quadrata ex CA AB, rectangulo, quod bis sub CA AD continetur. In obtusangulis igitur triangulis, quadratum, quod fit à latere obtusum angulum subtendente, majus est quam quadrata, quæ fiunt à lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo contento bis sub uno laterum, quæ sunt circa obtusum

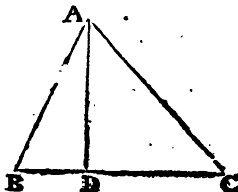


ſum angulum, in quod protractum perpendicularis cadit, & linea aſſumpta exterius à perpendiculari ad angulum obtuſum. Quod demonſtrare oportebat.

PROP. XIII. THEOR.

In acutangulis triangulis, quod à latere acutum angulum ſubtendente fit quadratum, minus eſt quam quadrata quæ fiunt à lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis ſub uno laterum, quæ ſunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & linea à perpendiculari intus aſſumpta ad angulum acutum.

Sit acutangulum triangulum A B C, acutum habens angulum ad B: ducatur à puncto A [a] ad B C perpendicularis A D. dico quadratum quod fit ex A C minus eſſe quam quadrata quæ ex C B B A fiunt, rectangulo quod bis ſub C B B D continetur. Quoniam enim recta linea C B ſecta eſt utcunque in D, erunt quadrata ex C B B D æqualia [b], & rectangulo quod bis ſub C B B D continetur, & quadrato ex D C. commune apponatur ex A D quadratum. quadrata igitur ex C B B D D A æqualia ſunt, & rectangulo bis ſub C B B D contento, & quadratis ex A D D C. ſed quadratis ex B D D A æquale eſt [c] ex A B quadratum; rectus enim angulus eſt qui ad D. quadratis vero ex A D D C æquale [c] eſt quadratum ex A C, quadrata igitur ex C B B A ſunt æqualia quadrato ex A C, & ei quod bis ſub C B B D continetur rectangulo. quare ſolum quadratum ex A C minus eſt quam quadrata ex C B B A, rectangulo quod bis ſub C B B D continetur. In acutangulis igitur triangulis quadratum quod à latere acutum angulum ſubtendente fit, minus eſt quam quadrata quæ fiunt à lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis ſub uno laterum quæ ſunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & linea à perpendiculari intus aſſumpta ad angulum acutum. Quod demonſtrare oportebat.

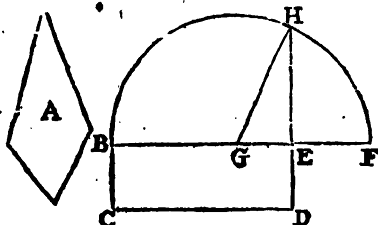


[a] 12. primi.
[b] 7. hujus.
[c] 47. primi.

PROP. XIV. PROBL.

Dato rectilineo æquale quadratum constituere.

Sit datum rectilineum A. oportet ipsi A rectilineo æquale quadratum constituere. Constituatur [a] rectilineo A æquale parallelogrammum rectangulum B C D E. si igitur B E est æqualis E D, factum jam erit quod proponebatur, etenim rectilineo A æquale quadratum constitutum est B D: sin minus, una ipsarum B E E D major est. sit B E major; & producatur ad F, ponaturque ipsi E D æqualis E F. deinde secta F B bifariam [b] in G: centro quidem G, intervallo autem unius ipsarum G B G F semicirculus describatur B H F; producaturque D E in H, & G H ducatur. Quoniam igitur recta linea B F secta est in partes æquales ad G, inæquales ad E; erit rectangulum sub B E E F, una cum quadrato quod fit ex E G [c], æquale quadrato ex G F. est autem G F æqualis G H. rectangulum igitur sub B E E F una cum quadrato ex E G, æquale est quadrato ex G H. sed quadrato ex G H æqualia [d] sunt ex H E E G quadrata. ergo rectangulum sub B E E F una cum quadrato ex E G æquale est quadratis ex H E E G. commune auferatur E G quadratum. reliquum igitur rectangulum sub B E E F est æquale quadrato ex E H. sed rectangulum sub B E E F est ipsum B D parallelogrammum, quoniam E F est æqualis E D. ergo B D parallelogrammum quadrato ex E H est æquale. parallelogrammum autem B D est æquale rectilineo A. rectilineum igitur A quadrato ex E H descripto æquale erit. Quare dato rectilineo A æquale quadratum constitutum est, quod videlicet ex ipsa E H describitur. Quod facere oportebat.



a 45. primi.
b 10. primi.
c 5. hujus.
d 47. primi.

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER TERTIUS.

DEFINITIONES.

I.

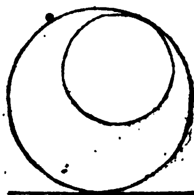
ÆQUALES circuli ſunt, quorum diametri ſunt æquales, vel quorum quæ ex centris ſunt æquales.

II.

Recta linea circulum contingere dicitur, quæ contingens circulum, & producta, ipſum non ſecat.

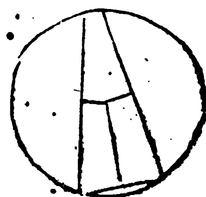
III.

Circuli contingere ſe dicuntur, qui contingentes, ſe ipſos non ſecant.



IV.

In circulo æqualiter diſtare à centro rectæ lineæ dicuntur, quando à centro ad ipſas perpendiculares ductæ ſunt æquales.

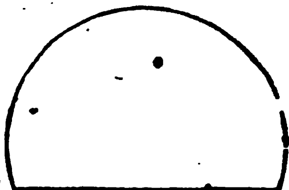


V.

Magis autem diſtare à centro dicitur ea, in quam major perpendicularis cadit.

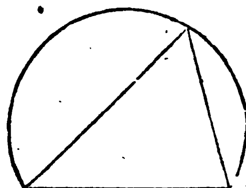
VI.

Segmentum circuli eſt figura, quæ recta linea, & circuli circumferentia continetur.



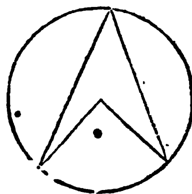
VII.

Segmenti autem angulus eſt, qui recta linea, & circuli circumferentia comprehenditur.



VIII.

In ſegmento angulus eſt, quando in circumferentia ſegmenti ſumatur aliquod punctum, atque ab ipſo ad terminos lineæ ejus, quæ baſis eſt ſegmenti, rectæ lineæ ducantur, angulus ductis lineis contentus.



IX.

Quando autem continentes angulum rectæ lineæ aſſumunt circumferentiam, in illa conſiſtere angulus dicitur.

X.

Sector circuli eſt, quando angulus ad centrum conſtiterit, figura contenta rectis lineis angulum comprehendentibus, & circumferentia ab ipſis aſſumpta.

XI.

Similia circulorum ſegmenta ſunt, quæ angulos ſuſcipiunt æquales, vel in quibus anguli æquales conſiſtunt.



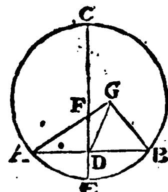


PROP.

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

Dati circuli centrum invenire.

Sit datus circulus A B C, oportet circuli A B C centrum invenire. Ducatur in ipso quædam recta linea A B utcunque, & in puncto D bifariam [a] secetur, à puncto autem D ipsi A B ad rectos angulos [b] ducta D C in E producatur; & secetur C E bifariam [a] in F. dico punctum F circuli ABC centrum esse. Non enim, sed si fieri potest, sit G centrum, & G A G D G B ducantur. itaque quoniam D A est æqualis D B, communis autem D G, erunt duæ A D D G duabus G D D B æquales, altera alteri: & basis G A æqualis [c] est basi G B; sunt enim ex centro G. angulus igitur A D G angulo G D B est [d] æqualis. cum autem recta linea super rectam lineam insistens, angulos qui deinceps sunt, æquales inter se fecerit, [e] rectus est uterque æqualium angulorum. ergo angulus G D B est rectus. sed & rectus F D B. æqualis igitur est angulus F D B angulo G D B, major minori, quod fieri non potest. quare G non est circuli A B C centrum. similiter ostendemus neque aliud esse, præter ipsum F. ergo F centrum est circuli A B C. Quod invenire oportebat.



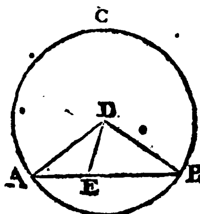
[a] 10. primi.
[b] 11. primi.
[c] Def. 15. primi.
[d] 8. primi.
[e] Def. 10. primi.

Cor. Si in circulo quævis recta linea, lineam quandam bifariam & ad angulos rectos secet, in secante erit centrum circuli.

PROP. II. THEOR.

Si in circumferentia circuli duo quævis puncta sumantur, quæ ipsa conjungit recta linea intra circulum cadet.

Sit circulus A B C; in circumferentia ipsius sumantur duo quævis puncta A B. dico rectam lineam quæ à puncto A ad B ducitur, intra circulum cadere. sumatur enim in recta A B punctum quodvis E, & jungantur D A D E D B. Quoniam D A est æqualis D B, erit [a] angulus D A B æqualis angulo D B A, & quoniam trianguli D A E latus A E producitur, erit [b] angulus D E B angulo D A E major, angulus autem D A E æqualis est angulo D B E, ergo D E B angulus angulo D B E est



[a] 5. primi.
[b] 16. primi.

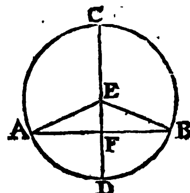
c 19.primi. est major. sed majori c angulo majus latus subtenditur. major igitur est DB ipsa DE. sed DB ad circumferentiam tantum pertingit. ergo DE non eo usque protenditur. adeoque punctum E cadet intra circulum. Si igitur in circumferentia &c. Quod oportebat demonstrare.

Cor. Hinc si recta circulum tangat, in unico puncto eum tangit.

PROP. III. THEOR.

Si in circulo recta linea per centrum ducta, rectam lineam quandam non ductam per centrum bifariam secet, & ad angulos rectos ipsam secabit; quod si ad angulos rectos ipsam secet, & bifariam secabit.

Sit circulus ABC, & in ipso recta linea per centrum ducta CD rectam lineam quandam AB non ductam per centrum bifariam secet in puncto F. dico ad angulos rectos ipsam secare. sumatur enim circuli



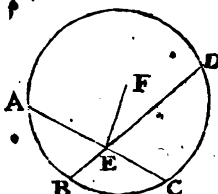
a 1. hujus. ABC centrum a quod sit E, & EA EB jungantur. Quoniam igitur AF est æqualis FB, communis autem FE, duæ AF FE duabus BF FE æquales sunt, & basis EA basi EB est æqualis. ergo & angulus AFE angulo BFE æ-
b 8. primi. qualis b erit. cum autem recta linea super rectam insistens an-
c Def. 10. primi. gulos, qui deinceps sunt, æquales inter se fecerit, rectus est c uterque æqualium angulorum. uterque igitur AFE BFE est rectus. quare recta linea CD per centrum ducta rectam lineam AB non ductam per centrum bifariam secans, & ad angulos rectos ipsam secabit. Si vero CD secet AB ad rectos angulos, dico & bifariam ipsam secare, hoc est AF ipsi FB æqualem esse. iisdem enim constructis, quoniam EA, quæ
d 5. primi. ex centro, est æqualis EB, & angulus EAF angulo d EBF æqualis erit; est autem & AFE rectus æqualis recto BFE. duo igitur triangula EAF EBF duos angulos duobus angulis æquales habent, unumque latus uni lateri æquale EF, commune scilicet utrisque, quod uni angulorum æqualium subtenditur. ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia
e 26.primi. e habebunt. atque erit AF ipsi FB æqualis. Si igitur in circulo recta linea per centrum ducta rectam lineam quandam non ductam per cenrrum bifariam secet, & ad angulos rectos ipsam secabit. quod si ipsam secet ad rectos angulos, & bifariam secabit. Quod oportebat demonstrare.

PROP.

PROP. IV. THEOR.

Si in circulo duæ rectæ lineæ se invicem secent non ductæ per centrum, sese bifariam non secabunt.

Sit circulus ABCD; & in ipso duæ rectæ lineæ AC BD se invicem secent in puncto E, non ductæ per centrum. dico eas sese bifariam non secare. si enim fieri potest, secent sese bifariam, ita ut AE sit æqualis EC & BE ipsi ED: sumaturque ^a centrum ABCD circuli, quod sit F, & EF jungatur. quoniam igitur recta linea FE per centrum ducta rectam lineam quandam AC non ductam per centrum bifariam secat, & ad rectos angulos ipsam secabit ^b. quare rectus est FEA angulus. rursus quoniam recta linea FE rectam lineam quandam BD non ductam per centrum bifariam secat, & ad angulos rectos ipsam ^b secabit. rectus igitur angulus est FEB. ostensus autem est rectus & FEA. ergo FEA angulus ipsi FEB æqualis erit, minor majori, quod fieri non potest. non igitur AC BD sese bifariam secant. Quare si in circulo duæ rectæ lineæ se invicem secent non ductæ per centrum, sese bifariam non secabunt. Quod ostendere oportebat.



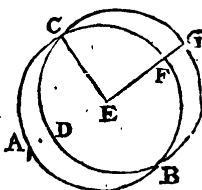
a 1. hujus.

b 3. hujus.

PROP. V. THEOR.

Si duo circuli se invicem secent, non erit ipsorum idem centrum.

Duo enim circuli se invicem secent ABC CDG in punctis B, C. dico ipsorum idem centrum non esse. Si enim fieri potest, sit centrum E; junganturque EC, & EFG utcunque ducatur. Quoniam E centrum est circuli ABC, erit CE ipsi EF æqualis. rursus quoniam E centrum est CDG circuli, æqualis est CE ipsi EG., sed ostensa est CE æqualis EF. ergo EF ipsi EG æqualis erit, minor majori, quod fieri non potest. non igitur punctum E centrum est circulorum ABC CDG. Quare si duo circuli se invicem secent, non erit ipsorum idem centrum. Quod ostendendum fuit.

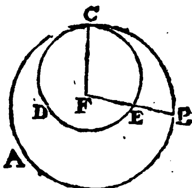


PROP.

PROP. VI. THEOR.

Si duo circuli sese intra contingant, ipsorum idem centrum non erit.

Duo enim circuli ABC CDE contingant sese intra in puncto C. dico ipsorum non esse idem centrum. si enim fieri potest, sit F, jungaturque FC, & FEB utcunque ducatur. Quoniam igitur F centrum est circuli ABC, æqualis est CF ipsi FB. rursus quoniam F centrum est circuli CDE, erit CF æqualis FE. ostensa autem est CF æqualis FB. ergo & FE ipsi FB est æqualis, minor majori, quod fieri non potest. non igitur F punctum centrum est circulorum ABC CDE. Quare si duo circuli sese intra contingant, ipsorum idem centrum non erit. Quod demonstrare oportebat.

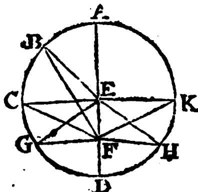


PROP. VII. THEOR.

Si in circuli diametro aliquod punctum sumatur, quod non sit centrum circuli, & ab eo in circulum cadant quævis rectæ lineæ; maxima quidem erit in qua centrum: minima vero reliqua: aliarum autem propinquior ei quæ per centrum transit, semper remotiore major est. at duæ tantum æquales ab eodem puncto in circulum cadent ad utrasque partes minimæ.

Sit circulus ABCD, cujus diameter AD, & in ipsa AD sumatur aliquod punctum F, quod non sit centrum circuli. Sit autem circuli centrum E: & à puncto F in circulum ABCD cadant quædam rectæ lineæ FB FC FG. dico FA maximam esse, & FD minimam: aliarum vero, FB quidem majorem quam FC, & FC majorem quam FG. jungantur enim BE CE GE. Et quoniam omnis trianguli duo latera [a] reliquo sunt majora; erunt BE EF majores quàm BF. est autem AE æqualis BE. ergo BE EF ipsi AF sunt æquales. major igitur est AF quàm FB. rursus quoniam BE est æqualis CE, communis autem FE, duæ BE EF duabus CE EF æquales

a 20. primi.



quales sunt. sed BEF angulus major est angulo CEF: basis igitur BF basi FC est [b] major. eadem ratione & CF major [b] 24.primi.
est quam FG. rursus quoniam GF FE majores [a] sunt quam [a] 20.primi.
GE, æqualis autem GE ipsi ED; erunt GF FE majores quam ED. communis auferatur FE. ergo reliqua GF major est quam reliqua FD. maxima igitur est FA, & FD minima: major vero BF quam FC, & FC quam FG major. dico & à puncto F duas tantum rectas lineas æquales cadere in circulum ABCD ad utrasque partes minimæ FD. constituatur [c] enim ad [c] 23.primi.
lineam EF atque ad datum in ea punctum E, angulo GEF æqualis angulus FEH: & FH jungatur. quoniam igitur GE est æqualis EH, communis autem EF, duæ GE EF duabus HE EF æquales sunt: & angulus GEF est æqualis angulo HEF. basis igitur FG basi FH æqualis [d] erit. dico à puncto [d] 4. primi.
F in circulum non cadere aliam ipsi FG æqualem. si enim fieri potest, cadat FK & quoniam FK est æqualis FG, estque ipsi FG æqualis FH; erit & FK ipsi FH æqualis, videlicet propinquior ei, quæ per centrum transit æqualis remotiori, quod fieri non potest. Si igitur in circuli diametro aliquod punctum sumatur, quod non sit centrum circuli, &c. Quod demonstrare oportebat.

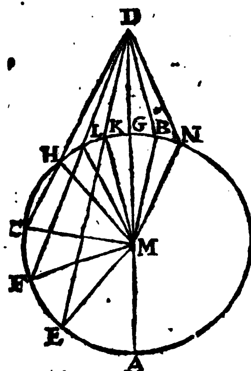
PROP. VIII. THEOR.

Si extra circulum aliquod punctum sumatur, atque ab eo ad circulum ducantur quædam rectæ lineæ quarum una per centrum transeat, aliæ vero utcunque: earum quidem, quæ in concavam circumferentiam cadunt, maxima est quæ per centrum transit; aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum, semper remotiore major est. at earum, quæ in convexam circumferentiam cadunt, minima est quæ inter punctum & diametrum interjicitur; aliarum vero quæ propinquior minimæ, semper remotiore est minor. duæ autem tantum æquales à puncto in circulum cadunt ad utrasque partes minimæ.

Sit circulus ABC, & extra circulum sumatur aliquod punctum D: ab eo autem in circulum ducantur rectæ lineæ quædam DA DE DF DC: sitque DA per centrum. dico earum quidem, quæ in concavam BEFC cirumferentiam cadunt, maximam esse DA, quæ per centrum transit; & minimam, quæ inter punctum D & diametrum AG interjicitur, videlicet DG: majorem autem DE quam DF; & DF

majorem

majorem quam DC: earum vero quæ in convexam circumferentiam HLKC cadunt, quæ propinquior est minimæ DG semper remotiore esse minorem; hoc est DK minorem quam DL, & DL minorem quam DH. sumatur *a* enim centrum circuli ABC, quod sit M, & jungantur ME MF MC MH ML. & quoniam AM est æqualis ME, communis apponatur MD. ergo AD est æqualis ipsis EM MD. sed EM MD sunt majores *b* quam ED. ergo & AD quam ED est major. rursus quoniam æqualis est ME ipsi MF, communis apponatur MD. erunt EM MD ipsi MF MD æquales; at angulus EMD major est angulo FMD. basis igitur ED basi FD major *c* erit. similiter demonstrabimus, & FD majorem esse quam CD. ergo maxima est DA; major autem DE quam DF, & DF quam DC major. præterea quoniam MK KD sunt majores *b* quam MD, & MG est æqualis MK; erit reliqua KD quam reliqua *d* GD major. quare GD minor quam KD, & idcirco GD minima est. & quoniam trianguli MLD in uno latere MD, duæ rectæ lineæ MK KD intra constituantur, erunt *e* MK KD minores ipsis ML LD, quarum MK est æqualis ML. reliqua igitur DK minor est quam reliqua DL. similiter ostendemus, & DL quam DH minorem esse. ergo DG minima est. minor vero DK quam DL, & DL minor quàm DH. dico etiam duas tantum æquales à puncto D in circulum cadere ad utrasque minimæ partes, constituatur ad rectam lineam MD, ad datumque in ea punctum M, angulo KMD æqualis *f* angulus DMB, & DB jungatur. itaque quoniam MK est æqualis MB, communis autem MD, duæ K'M MD duabus BM MD æquales sunt, altera alteri, & angulus KMD æqualis angulo BMD, basis igitur DK basi DB est æqualis *g*. dico à puncto D aliam ipsi DK æqualem in circulum non cadere. si enim fieri potest, cadat DN. & quoniam DK est æqualis DN, & DK ipsi DB est æqualis; erit & DB æqualis DN, propinquior scilicet minimæ æqualis remotiori, quod fieri non posse ostensum est. Si igitur extra circulum aliquod punctum sumatur, &c. quod ostendere oportebat.



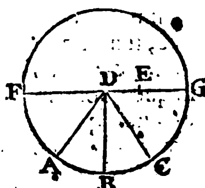
a 1. hujus.
b 20. primi.
c 24. primi.
d Axiom. 4.
e 21. primi.
f 23. primi.
g 4. primi.

PROP.

PROP. IX. THEOR.

Si intra circulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant plures quàm duæ rectæ lineæ æquales; punctum, quod sumitur, circuli centrum erit.

Sumatur enim intra circulum A B C punctum aliquod D: atque à puncto D in circulum A B C cadant plures quam duæ rectæ lineæ æquales D A D B D C. dico punctum D, quod sumitur, circuli A B C esse centrum. Non enim; sed, si fieri potest, sit E centrum, & juncta D E in F G producatur. ergo F G [a] diameter est A B C circuli. itaque quoniam in F G diametro circuli A B C sumptum est aliquod punctum D quod non est centrum circuli, maxima quidem erit D G, major [b] autem D C quam D B, & D B quam D A. sed & æquales, [c] quod fieri non potest. non igitur E centrum est circuli A B C. similiter ostendemus neque aliud punctum centrum esse præter ipsum D. ergo D circuli B C centrum erit. Quod oportebat demonstrare.

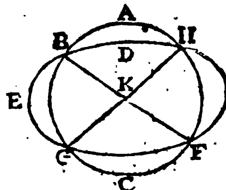


[a] Def. 17. primi.
[b] 7. hujus.
[c] ex hyp.

PROP. X. THEOR.

Circulus circulum in pluribus, quàm duobus punctis non secat.

Si enim fieri potest circulus A B C circulum D E F secet in pluribus punctis, quam duobus; nempe in B, G, F, & circuli A B C centrum sumatur, quod sit K, & K B K G K F jungantur. Quoniam igitur intra circulum D E F sumptum est aliquod punctum K, à quo in circulum D E F incidant plures quam duæ rectæ lineæ K B K G K F æquales, erit punctum K circuli D E F centrum [a]. est autem & circuli A B C centrum [b] K duorum igitur circulorum, qui sese secant, idem erit K centrum, quod fieri non potest. Quare circulus circulum in pluribus,



[a] 9. hujus.
[b] Ex hyp.

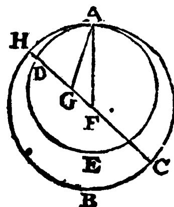
pluribus quam duobus punctis non secat. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XI. THEOR.

Si duo circuli sese intus contingant, & sumantur centra ipsorum; recta linea ipsorum centra conjungens producta in circulorum contactum cadet.

Duo enim circuli ABC ADE sese intus contingant in puncto A, & sumatur circuli quidem ABC centrum quod sit F; circuli vero ADE centrum G. dico rectam lineam à puncto G ad F ductam, si producatur, in punctum A cadere. non enim; sed, si fieri potest, cadat ut FGDH. & AF AG jungantur. Itaque quoniam AG GF majores a sunt quam FA, hoc est quam FH, communis auferatur FG. reliqua igitur AG major est quam reliqua GH. sed AG est æqualis GD. ergo GD ipsa GH est major, minor majore, quod fieri non potest. non igitur à puncto F ad G ducta recta linea extra contactum A cadet. quare in ipsum cadat necesse est. Si igitur duo circuli sese intus contingant, recta linea ipsorum centra conjungens, si producatur, in contactum circulorum cadet. Quod oportebat demonstrare.

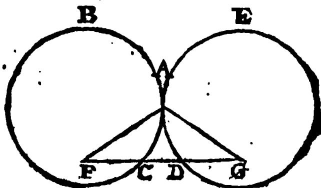
a 20. primi.



PROP. XII. THEOR.

Si duo circuli sese extra contingant, recta linea ipsorum centra conjungens per contactum transibit.

Duo enim circuli ABC ADE sese extra contingant in puncto A; & sumatur circuli quidem ABC centrum quod sit F: circuli vero ADE centrum G. dico rectam lineam, quæ à puncto F ad G ducitur, per contactum A transire. non enim; sed, si fieri potest, cadat ut FCDG: & FA AG jungantur. Quoniam igitur F centrum est circuli ABC, erit AF æqualis FC. rursus quoniam G centrum est ADE circuli, erit AG ipsi GD æqualis. ostensa est autem, & AF æqualis FC. sunt igitur FA AG ipsis FC DG æquales, ergo tota FG major est quam FA AG. sed & minor,



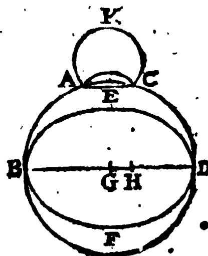
minor ᵃ, quod fieri non potest. non igitur à puncto F ad C ducta recta linea per contactum A non transibit. quare per ipsum transeat necesse est. Si igitur duo circuli sese extra contingant, recta linea ipsorum centra conjungens per contactum transibit. Quod oportebat demonstrare. a 20. primi.

PROP. XIII. THEOR.

Circulus circulum non contingit in pluribus punctis quàm uno, sive intus sive extra contingat.

Si enim fieri potest, circulum ABCD circulus EBFD contingat, primum intus, in pluribus punctis quam uno, videlicet in BD: & sumatur circuli quidem ABDC centrum G, circuli vero EBFD centrum H. ergo recta linea quæ à puncto G ad H ducitur, in puncta ᵃ B, D cadet. cadat ut BGHD. & quoniam G centrum est circuli ABDC, erit BG ipsi GD æqualis. major igitur est BG quam HD: & BH quam HD multo major. rursus quoniam H centrum est EBFD circuli, æqualis est BH ipsi HD. atqui ostensa est ipsa multo major, quod fieri non potest. non igitur circulus circulum intus contingit in pluribus punctis, quam uno. dico etiam neque extra contingere. si enim fieri potest, circulus ACK circulum ABDC extra contingat in pluribus punctis quàm uno, videlicet in A C, & AC jungatur. itaque quoniam in circumferentia utrorumque circulorum ABCD ACK sumpta sunt duo puncta A, C; recta linea, quæ ipsa conjungit intra utrumque ipsorum cadet ᵇ. sed intra circulum quidem ABDC cadit, extra circulum vero ACK, quod est absurdum. Non igitur circulus circulum extra contingit in pluribus punctis quàm uno. ostensum autem est neque intus contingere. circulus igitur circulum non contingit in pluribus punctis quàm uno, sive intus, sive extra contingat. Quod oportebat demonstrare.

a 11. hujus.



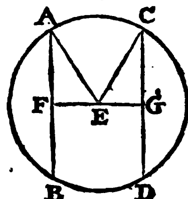
b 2. hujus.

PROP. XIV. THEOR.

In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter à centro distant: & quæ æqualiter à centro distant, inter se sunt æquales.

Sit circulus ABCD, & in ipso æquales rectæ lineæ AB CD. dico eas à centro æqualiter distare. Sumatur enim circuli

A B C D centrum quod sit E, & ab ipso ad A B C D perpendiculares ducantur E F E G, & A E E C jungantur. Quoniam igitur recta linea quædam per centrum ducta E F rectam lineam quandam A B non ductam per centrum ad rectos angulos secat, & bifariam ipsam secabit [a]. quare A F est æqualis F B, ideoque A B ipsius A F dupla. eadem ratione, & C D dupla est C G. atque est A B ipsi C D æqualis. æqualis igitur & A F ipsi C G. & quoniam A E est æqualis E C, erit & quadratum ex A E quadrato ex E C æquale. sed quadrato quidem ex A E æqualia sunt ex A F F E quadrata [b], rectus enim angulus est ad F: quadrato autem ex E C æqualia sunt quadrata ex E G G C, cum angulus ad G sit rectus. quadrata igitur ex A F F E æqualia sunt quadratis ex C G G E, quorum quadratum ex A F quadrato ex C G æquale, etenim æqualis est A F ipsi C G. reliquum igitur quod fit ex F E quadratum æquale est reliquo quod ex E G; ac propterea F E ipsi E G est æqualis. in circulo autem æqualiter distare à centro rectæ lineæ dicuntur, quando à centro ad ipsas perpendiculares ductæ æquales [c] sunt. ergo A B C D à centro æqualiter distant. Sed si A B C D æqualiter distent à centro, hoc est, æqualis sit F E ipsi E G; dico A B ipsi C D æqualem esse. iisdem enim constructis, similiter ostendemus A B duplam esse ipsius A F, C D duplam ipsius C G. & quoniam æqualis est A E ipsi E C, erit & ex A E quadratum quadrato ex E C æquale. sed quadrato quidem ex A E æqualia [b] sunt quadrata ex E F F A: quadrato autem ex E C æqualia [b] quadrata ex E G G C. quadrata igitur ex E F F A quadratis ex E G G C æqualia sunt; quorum quadratum ex E G æquale est quadrato ex E F, est enim E G ipsi E F æqualis: reliquum igitur ex A F quadratum æquale est reliquo ex C G. ergo A F ipsi C G est æqualis. atque est A B ipsius A F dupla, & C D dupla ipsius C G. In circulo igitur æquales rectæ lineæ æqualiter à centro distant. Et quæ æqualiter à centro distant, inter se sunt æquales. Quod oportebat demonstrare.



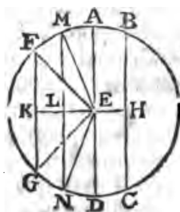
a 3. hujus.
b 47. primi.
c 4. def. hujus.

PROP.

PROP. XV. THEOR.

In circulo maxima quidem est diameter. aliarum vero semper propinquior ei quae per centrum transit, remotiore major est.

Sit circulus A B C D, cujus diameter A D, centrum E; & propinquior quidem diametro A D sit B C; remotior vero F G. dico A D maximam esse, & B C majorem quam F G. Ducantur enim à centro E ad B C F G perpendiculares E H E K. & quoniam B C propinquior est ei quae per centrum transit, remotior autem F G; erit E K quam E H major. ponatur ipsi E H aequalis E L, & per L ipsi E K ad rectos angulos ducta L M in N producatur, & jungatur E M E N E F E G. quoniam igitur E H est aequalis E L, erit & B C ipsi M N aequalis [a]. rursus quoniam aequalis est A E ipsi E M, & D E ipsi E N, erit & A D ipsis M E E N aequalis. sed M E E N [b] majores sunt quam M N; ergo & A D major est quam M N: & M N est aequalis B C, erit igitur A D quam B C major. quod cum duae E M E N duabus F E E G aequales sint, angulusque M E N major angulo F E G, & basis M N basi F G major [c] erit. ostensa autem est M N aequalis B C. ergo & B C quam F G est major. maxima igitur est A D diameter, & B C major quam F G. Quare in circulo maxima est diameter, aliarum vero semper propinquior ei, quae per centrum transit, remotiore est major. Quod demonstrare oportebat.



a 14. hujus.
b 20. primi.
c 24. primi.

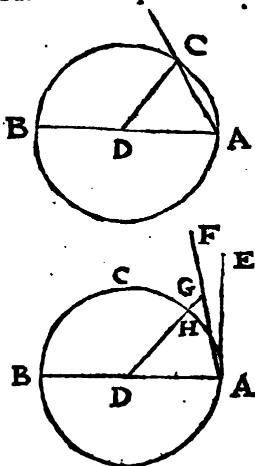
PROP. XVI. THEOR.

Quae diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur, cadit extra circulum: & in locum qui inter rectam lineam, & circumferentiam interjicitur altera recta linea non cadet: & semicirculi angulus omni angulo acuto rectilineo major est; reliquus autem minor.

Sit circulus A B C circa centrum D, & diametrum A B. dico rectam lineam, quae à puncto A ipsi A B ad rectos angulos ducitur extra circulum cadere. non enim; sed, si fieri

 potest,

potest, cadat intus, ut AC, & DC jungantur. itaque quoniam æqualis est DA ipsi DC, erit & angulus DAC angulo ACD æqualis [a]. rectus autem est DAC [b]; ergo & ACD est rectus; ac propterea anguli DAC ACD duabus rectis æquales sunt. quod fieri non potest [c]. non igitur à puncto A ipsi BA ad rectos angulos ducta cadet intra circulum. similiter ostendemus neque in circumferentiam cadere. extra igitur cadat necesse est. cadat ut AE. dico in locum qui inter rectam lineam AE & circumferentiam CHA interjicitur, alteram rectam lineam non cadere. si enim fieri potest, cadat ut FA, & à puncto D ad FA perpendicularis [d] ducatur DG. & quoniam rectus est angulus AGD, minor autem recto DAG, erit DA quàm DG major [e]. æqualis autem est DA ipsi DH. major igitur est DH ipsa DG, minor majore, quod fieri non potest. non igitur in locum qui inter rectam lineam & circumferentiam interjicitur, altera recta linea cadet. dico præterea angulum semicirculi, qui recta linea BA, & circumferentia CHA continetur, omni angulo acuto rectilineo majorem esse; reliquum vero contentum circumferentia CHA, & recta linea AE omni angulo rectilineo esse minorem. si enim est aliquis angulus rectilineus acutus major quidem contento recta linea BA, & CHA circumferentia, aut aliquis minor contento CHA circumferentia, & recta linea AE, in locum qui inter circumferentiam CHA, & rectam lineam AE interjicitur, cadet aliqua recta linea quæ faciet angulum majorem quidem contento recta linea BA & CHA circumferentia, qui scilicet rectis lineis continetur, minorem vero contento circumferentia CHA, & AE recta linea, non cadit autem [f]: non igitur erit angulus acutus qui rectis lineis continetur, major angulo contento recta linea BA, & CHA circumferentia; neque minor contento circumferentia CHA, & AE recta linea.



[a] 5. primi.
[b] ex hyp.
[c] 17. primi.
[d] 12. primi.
[e] 19. primi.
[f] ex prius demonstratis.

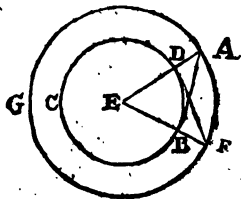
Cor. Ex hoc manifestum est rectam lineam quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, circulum contingere, & rectam lineam contingere circulum in uno tantum puncto, quoniam quæ occurit in duobus punctis intra ipsum cadit, ut ostensum est.

PROP.

PROP. XVII. PROBL.

A dato puncto rectam lineam ducere quæ datum circulum contingat.

Sit datum quidem punctum A, datus autem circulus BCD: oportet a puncto A rectam lineam ducere, quæ circulum BCD contingat. sumatur enim centrum circuli E; & juncta AE, centro quidem E, intervallo autem EA circulus AFG describatur: & à puncto D ipsi EA ad rectos angulos [a] ducatur DF: junganturque EBF AB. dico à puncto A ductam esse AB quæ circulum BCD contingit. quoniam enim E centrum est circulorum BCD AFG, erit EA æqualis EF, & ED ipsi EB. duæ igitur AE EB duabus FE ED æquales sunt, & angulum communem continent, qui est ad E. ergo basis DF basi AB est [b] æqualis, triangulumque DEF æquale triangulo EBA, & reliqui anguli reliquis angulis. æqualis igitur est angulus EBA angulo EDF. & EDF rectus est. quare & rectus EBA: atque est EB ex centro. quæ autem diametro circuli ab extremitate ad rectos angulos ducitur, circulum contingit [c]. ergo AB contingit circulum. A dato igitur puncto A ducta est recta linea AB quæ circulum BCD contingit. Quod facere oportebat.

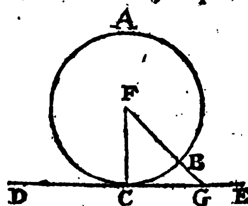


a 11. primi.
b 4. hujus.
c Cor. 16. hujus.

PROP. XVIII. THEOR.

Si circulum contingat quædam recta linea, à centro autem in contactum recta linea ducatur, ea ad contingentem perpendicularis erit.

Circulum enim ABC contingat quædam recta linea DE in puncto C: & circuli ABC centrum sumatur F, à quo ad C ducatur FC. dico FC ad ipsam DE perpendicularem esse. si enim non ita sit, ducatur à puncto F ad DE perpendicularis [a] FG. quoniam igitur angulus FGC rectus est, erit GCF acutus [b], ac propterea FGC angulus major angulo FCG. majorem autem angulum majus latus [c] subtendit. major igitur est FC quàm FG. æqualis autem FC ipsi FB ergo



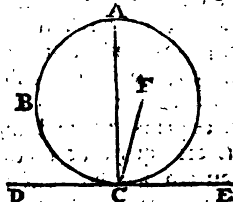
a 12. primi.
b 32. primi.
c 19. primi.

ergo FB ipsa FG est major, minor majore, quod fieri non potest. non igitur FG est perpendicularis ad DF, similiter ostendemus neque aliam quampiam esse praeter ipsam FC. ergo FC ad DE est perpendicularis. Si igitur circulum contingat quaedam recta linea, à centro autem in contactum recta linea ducatur, ea ad contingentem perpendicularis erit.

PROP. XIX. THEOR.

Si circulum contingat quaedam recta linea, à contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur: in ea circuli centrum erit.

Circulum enim ABC contingat quaedam recta linea DE in C, & à puncto C ipsi DE ad rectos angulos ducatur CA. dico in ipsa AC circuli centrum esse. non enim; sed, si fieri potest, sit F centrum, & jungatur CF. quoniam igitur circulum ABC contingit quaedam recta linea DE, & à centro ad contactum ducta est FC; erit FC ad ipsam DE perpendicularis [a]. rectus igitur angulus est FCE. est autem & ACE rectus [b]. ergo FCE angulus est aequalis angulo ACE, minor majori, quod fieri non potest. non igitur F centrum est ABC circuli. similiter ostendemus neque aliud aliquod esse praeterquam in ipsa AC. Quare si circulum contingat quaedam recta linea, à contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur; in ea circuli erit centrum. Quod demonstrare oportebat.



a 18. hujus.
b Ex hyp.

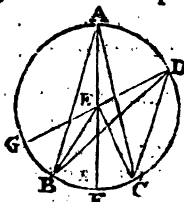
PROP. XX. THEOR.

In circulo angulus, qui ad centrum, duplex est ejus qui ad circumferentiam est, quando circumferentiam eandem pro basi habeant.

Sit circulus ABC, ac cujus centrum quidem angulus sit BEC, ad circumferentiam vero BAC, & eandem circumferentiam BC pro basi habeant. dico BEC angulum anguli BAC duplum esse. jungatur enim AE, & ad F producatur. itaque quoniam EA est aequalis EB, erit & angulus EAB angulo EBA [a] aequalis. anguli igitur EAB EBA duplices sunt ipsius

a 5. primi.

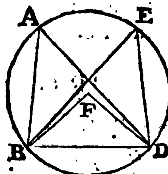
ipsius anguli E A B; sed angulus B E F est æqualis *b* angulis E A B E B A; ergo B E F angulus anguli E A B est duplex. eadem ratione & angulus F E C duplex est ipsius E A C. totus igitur B E C totius B A C duplex erit. rursus inflectatur, & sit alter angulus B D C, junctaque D E ad G producatur. similiter ostendemus angulum G E C anguli G D C duplum esse; quorum G E B duplus est ipsius G D B. ergo reliquus B E C reliqui B D C est duplus. In circulo igitur angulus qui ad centrum, duplex est ejus qui ad circumferentiam est, quando circumferentiam eandem pro basi habeant. Quod oportebat demonstrare. *b* 32.primi.



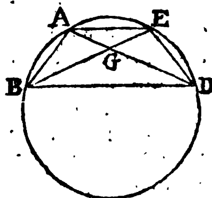
PROP. XXI. THEOR.

In circulo, qui in eodem segmento sunt, anguli inter se æquales sunt.

Sit circulus A B C D E, & in eodem segmento B A E D anguli sint B A D B E D, dico eos inter se æquales esse. sumatur enim circuli A B C D E centrum quod sit F: junganturque B F F D. Quoniam angulus quidem B F D est ad centrum, angulus vero B A D ad circumferentiam, & circumferentiam eandem B C D pro basi habent; erit B F D angulus *a* anguli B A D duplus. eadem ratione angulus B F D duplus est etiam anguli B E D. ergo angulus B A D angulo B E D æqualis erit. *a* 20. hujus.



si anguli B A D B E D sunt in segmento minore semicirculo, ducatur A E, eruntque omnes anguli trianguli A B G æquales *b* omnibus angulis trianguli D E G. & anguli A B E A D E sunt æquales per hactenus demonstrata, & anguli A G B D G E sunt etiam æquales *c*, ad verticem enim sunt: quare & reliquus B A G reliquo G E D æqualis erit. In circulo, igitur qui in eodem segmento sunt anguli inter se æquales sunt. Quod oportebat demonstrare. *b* 32.primi. *c* 15.primi.

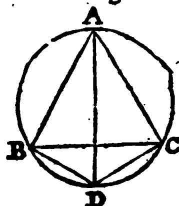


PROP. XXII. THEOR.

Quadrilaterorum quæ in circulis describuntur, anguli oppositi duobus rectis æquales sunt.

Sit circulus ABDC, & in ipso quadrilaterum ABDC dico angulos ipsius oppositos duobus rectis æquales esse. Jungantur AD BC: quoniam igitur omnis trianguli tres anguli duobus rectis sunt æquales [a], erunt trianguli ABC tres anguli CAB ABC BCA æquales duobus rectis. sed angulus ABC est æqualis [b] angulo ADC, in eodem enim sunt segmento ABDC. & angulus ACB æqualis [b] ipsi ADB, quod sunt in eodem ACDB segmento: totus igitur angulus BDC angulis ABC ACB æqualis est. communis apponatur BAC angulus; erunt anguli BAC ABC ACB angulis BAC BDC æquales. sed BAC ABC ACB sunt æquales [a] duobus rectis. ergo & anguli BAC BDC duobus rectis æquales erunt. similiter ostendemus angulos quoque ABD ACD duobus rectis esse æquales. Quadrilaterorum igitur, quæ in circulis describuntur, anguli oppositi duobus rectis æquales sunt. Quod oportebat demonstrare.

[a] 32. primi.
[b] 21. hujus.

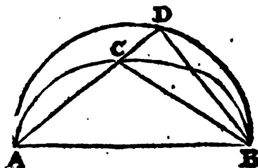


PROP. XXIII. THEOR.

Super eadem recta linea duo circulorum segmenta similia, & inæqualia ex eadem parte non constituentur.

Si enim fieri potest, super eadem recta linea AB duo circulorum segmenta similia, & inæqualia constituantur ex eadem parte ACB ADB; ducaturque ACD, & CB BD jungantur. itaque quoniam segmentum ACB simile est segmento ADB, similia autem circulorum segmenta sunt quæ angulos suscipiunt [a] æquales; erit ACB angulus æqualis angulo ADB, exterior interiori, quod fieri non potest [b]. Non igitur super eadem recta linea, duo circulorum segmenta similia, & inæqualia ex eadem parte constituentur. Quod demonstrare oportebat.

[a] Def. 11. hujus.
[b] 16. primi.

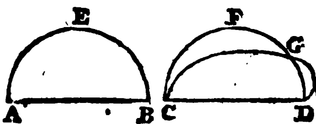


PROP.

PROP. XXIV. THEOR.

Super æqualibus rectis lineis similia circulorum segmenta inter se æqualia sunt.

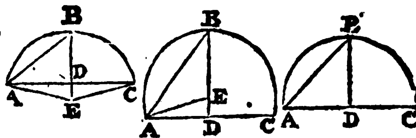
Sint enim super æqualibus rectis lineis A B C D similia circulorum segmenta A E B C F D. dico segmentum A E B segmento C F D æquale esse. applicato enim A E B segmento segmento C F D, & posito puncto quidem A in C, recta vero linea A B in C D; congruet & B punctum puncto D, propterea quod A B ipsi C D sit æqualis. congruente autem recta linea A B rectæ C D; congruet & A E B segmentum segmento C F D. si enim A B congruet ipsi C D, segmentum autem A E B segmento C F D non congruet, sed permutabitur ut C G D, circulus circulum in pluribus quam duobus punctis secabit. etenim circulus C G D circulum C F D secat in pluribus punctis quàm duobus, videlicet in punctis C, G, D, quod fieri non *a* potest. non igitur congruente recta linea A B rectæ C D, non congruet & A E B segmentum segmento C F D. quare congruet, & ipsi æquale erit. Super æqualibus igitur rectis lineis similia circulorum segmenta inter se æqualia sunt. Quod oportebat demonstrare. *a* 10. hujus.



PROP. XXV. PROBL.

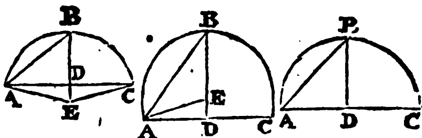
Circuli segmento dato describere circulum cujus est segmentum.

Sit datum circuli segmentum A B C. oportet describere circulum cujus A B C est segmentum. Secetur A C bifariam *a* in D: & à puncto D ipsi A C ad rectos *a* 10. primi.
angulos ducatur *b* D B, & A B jungatur. vel igitur angulus A B D major est angulo B A D, vel minor, vel ipsi æqualis. sit primum major, & ad rectam lineam B A, atque ad datum in ea punctum A constituatur angulus B A E æqualis *c* angulo A B D; & D B ad E producatur, *c* 23. primi.
jungaturque E C. quoniam igitur angulus A B E est æqualis *b* 11. primi.



d 6. primi. angulo BAE, [d] erit & BE recta linea ipsi EA æqualis: & quoniam AD est æqualis DC, communis autem DE, duæ AD DE duabus CD DE æquales sunt, altera alteri; & angulus ADE æqualis angulo CDE, rectus enim uterque est. ergo & basis AE basi

e 4. primi. EC est æqualis [e]. sed ostensa est AE æqualis EB. quare & BE ipsi EC est æqualis, ac propterea tres rectæ lineæ AE EB EC inter se æquales sunt. centro igitur E, intervallo autem unâ ipsarum AE EB EC circulus descriptus etiam per reliqua [f] transibit puncta, & circulus descriptus erit. quare circuli segmento dato descriptus est circulus cujus segmentum est. sed & illud constat, segmentum ABC semicirculo minus esse; propterea quod centrum ipsius extra cadit. [g] similiter, & si angulus ABD sit æqualis angulo BAD, facta AD æquali utrique ipsarum BD DC, erunt tres rectæ lineæ AD DB DC inter se æquales, atque erit D circuli descripti centrum, & segmentum ABC semicirculus. [h] si vero angulus ABD minor sit angulo BAD; constituatur ad rectam lineam BA, & ad punctum in ea datum A, angulo ABD æqualis angulus BAE intra segmentum ABC. erit E centrum in ipsa DB, atque erit ABC segmentum semicirculo majus. Circuli igitur segmento dato descriptus est circulus cujus segmentum est. Quod facere oportebat.



f 9. hujus.

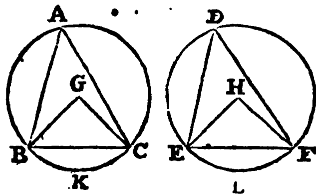
g Caf. 3. fig. 3.

h Caf. 2. fig. 2.

PROP. XXVI. THEOR.

In æqualibus circulis æquales anguli æqualibus insistunt circumferentiis, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant.

Sint æquales circuli ABC DEF, & in ipsis æquales anguli ad centra quidem BGC EHF, ad circumferentias vero BAC EDF. dico BKC circumferentiam circumferentiæ ELF æqualem esse. jungantur enim BC EF. Quoniam æquales sunt ABC DEF circuli, erunt & quæ ex centris æquales. duæ igitur BG GC duabus EH HF æquales sunt: & angulus ad G æqualis angulo ad H. ergo & basis



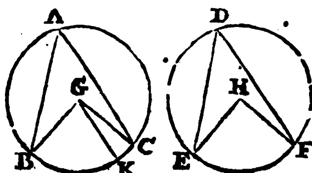
basis B C basi E F est [a] æqualis. rursus quoniam æqualis est angulus ad A angulo ad D, segmentum B A C simile [b] erit segmento E D F: & sunt super æqualibus rectis lineis B C E F. quæ autem super æqualibus rectis lineis similia sunt circulorum segmenta, inter se æqualia [c] sunt. segmentum igitur B A C segmento E D F est æquale. sed & totus A B C circulus æqualis est toti D E F. ergo & reliqua circumferentia B K C reliquæ E L F æqualis erit. In æqualibus igitur circulis æquales anguli æqualibus insistunt circumferentiis, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant. Quod oportebat demonstrare.

[a] 4. primi.
[b] Def. 11. hujus.
[c] 24. hujus.

PROP. XXVII. THEOR.

In æqualibus circulis anguli qui æqualibus insistunt circumferentiis inter se æquales sunt, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant.

In æqualibus enim circulis A B C D E F, æqualibus circumferentiis B C E F insistant anguli ad centra quidem B G C E H F, ad circumferentias vero B A C E D F. dico angulum B G C angulo E H F, & angulum B A C angulo E D F æqualem esse. si quidem igitur angulus B G C æqualis sit angulo E H F, manifestum est angulum quoque B A C angulo E D F esse æqualem. sin minus, unus ipsorum est major. sit



major B G C, & constituatur ad rectam lineam B G, & ad punctum in ipsa G, angulo E H F æqualis [a] angulus B G K. æquales autem anguli æqualibus insistunt [b] circumferentiis, quando ad centra fuerint. ergo circumferentia B K æqualis est circumferentiæ E F. sed circumferentia E F æqualis est ipsi B C. ergo & B K ipsi B C est æqualis. minor majori, quod fieri non potest. non igitur inæqualis est angulus B G C angulo E H F: ergo est æqualis. atque est anguli quidem B G C dimidium angulus qui ad A; anguli vero E H F dimidium qui ad D. angulus igitur qui ad A angulo qui ad D est æqualis. In æqualibus igitur circulis, anguli qui æqualibus insistunt circumferentiis inter se æquales sunt, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant. Quod oportebat demonstrare.

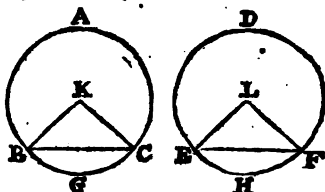
[a] 23. primi.
[b] 26. hujus.

PROP.

PROP. XXVIII. THEOR.

In æqualibus circulis æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori.

Sint æquales circuli ABC DEF; & in ipsis æquales rectæ lineæ BC EF, quæ circumferentias quidem BAC EDF majores auferant, circumferentias vero BGC EHF minores. dico circumferentiam BAC majorem majori circumferentiæ EDF, & minorem circumferentiam BGC minori EHF æqualem esse. sumantur enim centra [a] circulorum K, L, junganturque BK KC EL, LF. Quoniam circuli æquales sunt, erunt & quæ ex centris æquales [b]. duæ igitur BK KC sunt æquales duabus EL LF: & basis BC æqualis est basi EF, ergo angulus BKC angulo ELF est [c] æqualis: æquales autem anguli æqualibus insistunt circumferentiis, quando ad centra fuerint [d]. quare circumferentia BGC æqualis est circumferentiæ EHF, sed & totus ABC circulus toti DEF est æqualis. reliqua igitur circumferentia BAC reliquæ EDF æqualis erit. Ergo in æqualibus circulis æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori. Quod demonstrare oportebat.



a 1. hujus.
b Def. 1. hujus.
c 8. primi.
d 26. hujus.

PROP. XXIX. THEOR.

In æqualibus circulis, æquales circumferentias æquales rectæ lineæ subtendunt.

Sint æquales circuli ABC DEF: & in ipsis æquales assumantur circumferentiæ BGC EHF, & BC EF jungantur. dico rectam lineam BC rectæ EF æqualem esse. sumantur enim centra [a] circulorum K, L, & jungantur BK KC EL DF. quoniam igitur circumferentia BGC est æqualis circumferentiæ EHF, erit & angulus BKC angulo ELF æqualis [b]. & quoniam circuli ABC DEF sunt æquales, & quæ ex centris æquales erunt [c]. duæ igitur BK KC sunt æquales duabus EL LF; & æquales angulos continent. quare basis BC basi EF est [d] æqualis. In æqualibus igitur circulis æquales circumferentias æquales rectæ lineæ subtendunt. Quod oportebat demonstrare.

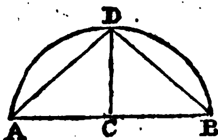
Vide figur. Prop. præcedentis.
a 1. hujus.
b 27. hujus.
c Def. 1. hujus.
d 4. primi.

PROP.

PROP. XXX. PROBL.

Datam circumferentiam bifariam secare.

Sit data circumferentia A D B. oportet A D B circumferentiam bifariam secare. Jungatur A B, & in C bifariam [a] secetur: à puncto autem C ipsi A B ad rectos angulos ducatur C D. & jungantur A D D B. quoniam igitur A C est æqualis C B, communis autem C D, duæ A C C D duabus B C C D æquales sunt: & angulus A C D æqualis angulo B C D, rectus enim uterque est: ergo basis A D basi B D est [b] æqualis. æquales autem rectæ lineæ [c] circumferentias æquales auferunt, quare circumferentia A D circumferentiæ B D æqualis erit. Data igitur circumferentia bifariam secta est. Quod facere oportebat.

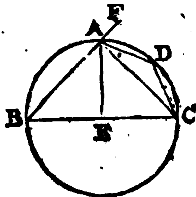


a 10. primi.
b 4. primi.
c 28. hujus.

PROP. XXXI. THEOR.

In circulo angulus, qui in semicirculo, rectus est, qui vero in majori segmento, minor est recto, & qui in minori, major recto; & insuper majoris quidem segmenti angulus recto major est, minoris vero segmenti angulus recto minor.

Sit circulus A B C D cujus diameter B C, centrum autem E; & jungantur B A A C A D D C. dico angulum quidem qui est in semicirculo B A C rectum esse, qui vero in segmento A B C majore semicirculo, videlicet angulum A B C, minorem esse recto, & qui est in segmento A D C minore semicirculo, hoc est angulum A D C, recto majorem. jungatur A E, & B A ad F producatur. itaque quoniam B E est æqualis E A, erit & angulus E A B, angulo E B A æqualis [a]. rursus quoniam A E est æqualis E C, & angulus A C E angulo C A E æqualis [a] erit. totus igitur angulus B A C est æqualis duobus A B C A C B angulis, est autem, & angulus F A C extra triangulum A B C, duobus A B C A C B æqualis [b]. angulus igitur B A C est æqualis angulo F A C; ac propterea uterque ipsorum rectus [c]. quare in semicirculo B A C angulus B A C rectus est.

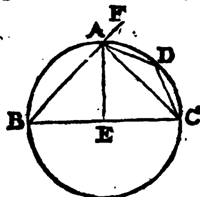


a 5. primi.
b 32. primi.
c Def. 10. primi.

est. & quoniam trianguli A B C duo anguli A B C B A C duobus rectis sunt d minores, rectus autem B A C, erit A B C angulus recto minor, atque est in segmento A B C majore semicirculo. quod cum in circulo quadrilaterum sit A B C D, quadrilaterorum vero qui in circulis describuuntur, anguli oppositi duobus rectis sint e æquales: erunt A B C A D C anguli æquales duobus rectis, & angulus A B C minor est recto, reliquus igitur A D C recto major erit, atque est in segmento A D C minore semicirculo. dico præterea majoris segmenti angulum qui continetur A B C circumferentia, & recta linea A C recto majorem esse; angulum vero minoris segmenti, contentum circumferentia A D C, & recta linea A C recto minorem. quod quidem perspicue apparet. quoniam angulus qui rectis lineis B A A C continetur rectus est, erit & contentus A B C circumferentia, & recta linea A C recto major. rursus quoniam angulus contentus rectis lineis C A A F rectus est, erit qui continetur recta linea C A, & A D C circumferentia, minor recto. In circulo igitur angulus qui in semicirculo, rectus est, qui vero in majore segmento, minor est recto, & qui in minori, major recto: & insuper majoris quidem segmenti angulus recto major est, minoris vero recto minor. Quod demonstrare oportebat.

d 17. primi.

e 22. hujus.



Cor. Ex hoc manifestum est, si trianguli unus angulus sit æqualis duobus, eum rectum esse; propterea quòd & qui deinceps est, iisdem est æqualis. quando autem anguli deinceps sunt æquales, necessario recti sunt f.

f Def. 10. primi.

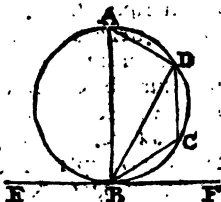
PROP. XXXII. THEOR.

Si circulum contingat quædam recta linea, à contactu autem in circulum ducatur recta linea ipsum secans; anguli quos ad contingentem facit, æquales erunt iis qui in alternis circuli segmentis consistunt.

Circulum enim A B C D contingat quædam recta linea E F in B, & à puncto B ad circulum A B C D ducatur recta linea B D ipsum utcunqne secans. dico angulos quos B D cum E F contingente facit, æquales esse iis qui in alternis circuli segmentis consistunt. hoc est angulum F B D esse æqualem angulo qui constituitur in D A B segmento, videlicet ipsi

D A B;

DAB; angulum vero DBE æqualem angulo DCB qui in segmento DCB constituitur. ducatur enim à puncto B ipsi EF ad rectos [a] angulos BA: & in circumferentia BD sumatur quodvis punctum C; junganturque AD DC CB. Quoniam igitur circulum ABCD contingit quædam recta linea EF in puncto B, & à contactu B ad rectos angulos contingenti ducta est BA; erit in ipsa BA centrum [b] ABCD circuli; quare BA ejusdem circuli [c] diameter est, & angulus ADB in semicirculo est [d] rectus. reliqui igitur anguli BAD ABD uni recto [e] æquales sunt. sed & ABF [f] est rectus. ergo angulus ABF æqualis est angulis BAD ABD. communis auferatur ABD. reliquus igitur DBF ei, qui in alterno circuli segmento consistit, videlicet angulo BAD, est æqualis. & quoniam in circulo quadrilaterum est ABCD, & anguli ejus oppositi æquales [g] sunt duobus rectis; erunt DBF DBE anguli angulis BAD BCD æquales. quorum BAD ostensus est æqualis ipsi DBF; ergo reliquus DBE ei, qui in alterno circuli segmento DCB constituitur, videlicet ipsi DCB, æqualis erit. Si igitur circulum contingat quædam recta linea, à contactu vero in circulum ducatur recta linea ipsum secans; anguli quos facit ad contingentem, æquales erunt iis qui in alternis circuli segmentis consistunt. Quod oportebat demonstrare.

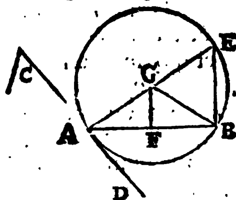


a 11. primi.
b 19. primi.
c Def. 17. primi.
d 31. hujus.
e 32. primi.
f ex constr.
g 22. hujus.

PROP. XXXIII. PROBL.

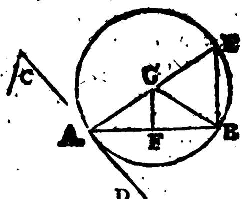
Super data recta linea describere segmentum circuli, quod suscipiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.

Sit data recta linea AB, datus autem angulus rectilineus, qui ad C. itaque oportet super data recta linea AB describere segmentum circuli, quod suscipiat angulum æqualem angulo qui est ad C. Ad rectam lineam AB, & ad punctum in ea datum A, constituatur angulus BAD angulo qui est ad C æqualis [a]. & à puncto A ipsi AD ad rectos angulos [b] ducatur AE; secetur autem AB bifariam [c] in F, atque à puncto F ducatur FG ad rectos angulos ipsi AB; & GB jungatur. quoniam igitur AF est æqualis FB, communis



a 23. primi.
b 11. primi.
c 10. primi.

munis autem FG, duæ AF FG duabus BF FG æquales sunt: & angulus AFG æqualis angulo BFG. ergo basis AG basi
d 4. hujus. GB est d æqualis. itaque centro G, intervallo autem AG circulus descriptus transibit etiam per B. describatur, & sit ABE, jungaturque EB. quoniam igitur ab extremitate diametri AB, & à puncto A, ipsi AB ad rectos angulos ducta est AD; ipsa AD circulum e continget. & quo-

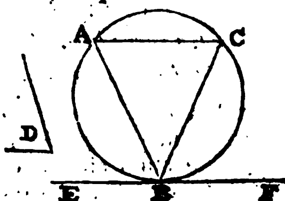


e Cor. 16. hujus. niam circulum ABE contingit quædam recta linea AD, & à contactu qui est ad A, in circulum ABE ducta est recta
f 32. hujus. linea AB: erit angulus DAB æqualis f angulo qui in alterno circuli segmento constituitur, videlicet ipsi AEB. sed angulus DAB, angulo ad C est æqualis. ergo & angulus ad C angulo AEB æqualis erit. super data igitur recta linea AB, segmentum circuli descriptum est AEB suscipiens angulum AEB, dato angulo qui est ad C, æqualem. Quod facere oportebat.

PROP. XXXIV. PROBL.

A dato circulo segmentum abscindere quod suscipiat angulum dato rectilineo æqualem.

Sit datus circulus ABC, datus autem angulus rectilineus qui ad D. oportet à circulo ABC segmentum abscindere.
a 17. hujus. quod suscipiat angulum angulo ad D æqualem. Ducatur a recta linea EF circulum ABC in puncto B contingens: & ad rectam lineam BF, & ad punctum in ea B, constituatur
b 23. primi. angulus FBC angulo qui est ad D æqualis b. quoniam igitur circulum ABC contingit quædam recta linea EF in B



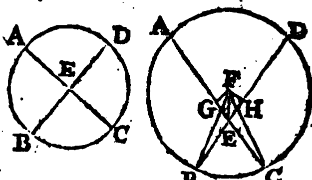
puncto, & à contactu B ducta est BC, erit angulus FBC æ-
c 32. hujus. qualis c ei qui in alterno circuli segmento constituitur. sed FBC angulus angulo qui ad D est æqualis. ergo & angulus in segmento BAC angulo ad D æqualis erit. A dato igitur circulo ABC, adscissum est segmentum quoddam BAC, suscipiens angulum dato angulo rectilineo qui est ad D, æqualem. Quod facere oportebat.

PROP.

PROP. XXXV. THEOR.

Si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secent, rectangulum sub segmentis unius contentum, æquale est ei, quod sub alterius segmentis continetur, rectangulo.

In circulo enim ABCD, duæ rectæ lineæ AC BD sese mutuo in puncto E secent. dico rectangulum contentum sub AE EC æquale esse ei quod sub DE EB continetur. si AC BD per centrum transeant, ita ut E sit centrum ABCD circuli; manifestum est æqualibus existentibus AE EC DE EB, & rectangulum contentum sub AE EC æquale esse ei quod sub DE EB continetur. si AC DB non transeant per centrum, sumatur centrum circuli ABCD quod sit F: & ab F ad rectas lineas AC DB perpendiculares ducantur FG FH: junganturque FB FC FE. quoniam igitur recta quædam linea GF per centrum ducta rectam lineam quandam AC non ductam per centrum ad rectos angulos secat, & bifariam ipsam secabit [a]. quare AG ipsi GC est æqualis. & quoniam recta linea AC secta est in partes æquales in puncto G, & in partes inæquales in E, erit rectangulum sub AE EC contentum, una cum ipsius EG quadrato [b], æquale quadrato ex GC. commune addatur ex GF quadratum. ergo rectangulum sub AE EC, una cum iis quæ ex EG GF quadratis, æquale est quadratis ex CG GF. sed quadratis quæ ex EG GF æquale [c] est quadratum ex FE; quadratis vero ex CG GF æquale est [c] quod ex FC fit quadratum. rectangulum igitur sub AE EC, una cum quadrato ex FE, æquale est quadrato ex FC. est autem CF æqualis FB. ergo rectangulum sub AE EC, unà cum quadrato ex EF, æquale est ei quod ex FB fit quadrato. eadem ratione & rectangulum sub DE EB unà cum quadrato ex FE, æquale est quadrato ex FB. ostensum autem est & rectangulum sub AE EC, unà cum quadrato ex FE, æquale ei quod fit ex FB quadrato. ergo rectangulum sub AE EC, unà cum quadrato ex FE, æquale est rectangulo sub DE EB, unà cum quadrato ex FE. commune auferatur FE quadratum. reliquum igitur rectangulum sub AE EC, reliquo sub DE EB rectangulo æquale erit. Quare si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secent, rectangulum sub segmentis unius contentum æquale est ei quod sub alterius segmentis continetur. Quod demonstrare oportebat.



a 3. hujus.

b 5. secundi.

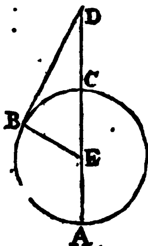
c 47. primi.

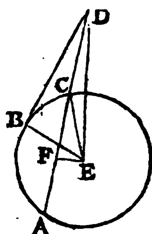
PROP.

PROP. XXXVI. THEOR.

Si extra circulum aliquod punctum sumatur, & ab eo in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secat, altera vero contingat; rectangulum quod sub tota secante, & exterius assumpta inter punctum & curvam circumferentiam continetur, æquale erit ei, quod à contingente fit, quadrato.

Extra circulum enim A B C sumatur aliquod punctum D, & ab eo ad dictum circulum cadant duæ rectæ lineæ D C A D B: & D C A quidem circulum A B C secet; D B vero contingat. dico rectangulum sub A D D C, quadrato, quod fit ex D B, æquale esse. vel igitur D C A per centrum transit, vel non transit. primum transeat per centrum circuli A B C, quod sit E, & E B jungatur. erit
a 18. hujus. angulus E B D rectus [a]. itaque quoniam recta linea A C bifariam secta est in E; & ipsi adjicitur C D, rectangulum sub A D D C, una cum quadrato ex E C, æ-
b 6. secundi. quale [b] erit ei quod fit ex E D quadrato. æqualis autem est C E ipsi E B, ergo rectangulum sub A D D C, unà cum quadrato quod ex E B, æquale est quadrato ex E D.





c 47. primi. sed quadratum ex E D est æquale quadratis [c] ipsarum E B B D, rectus enim angulus est E B D. rectangulum igitur sub A D D C, una cum quadrato ex E B, æquale est ipsarum E B, B D quadratis. commune auferatur quadratum quod ex E B; ergo reliquum sub A D D C rectangulum, quadrato quod fit à contingente D B æquale erit. secundo D C A non transeat
d 1. hujus. per centrum A B C circuli: sumaturque [d] centrum E, & ad A C perpendicularis agatur E F, & jungantur E B E C E D, rectus igitur est E F D angulus. & quoniam recta linea quædam E F per centrum ducta, rectam lineam quandam A C non ductam per centrum ad rectos angulos secat, & bifa-
e 3. hujus. riam ipsam secabit [e]. quare A F ipsi F C est æqualis. rursus quoniam recta linea A C bifariam secta est in F, atque ipsi adjicitur C D, erit rectangulum sub A D D C, unà cum quadrato ex F C, æquale [b] quadrato quod ex F D. commune apponatur quod ex F E quadratum. rectangulum igitur sub

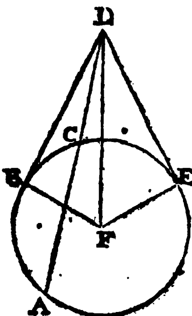
A D D C

AD DC unà cum quadratis ex FC FE est æquale quadratis ex DF FE. sed quadratis quidem ex DE FE æquale est [e] ex DE quadratum; etenim rectus est angulus EFD: quadratis vero ex CF FE æquale est [c] quadratum ex CE. ergo rectangulum sub AD DC, una cum quadrato quod ex CE, est æquale quadrato ex ED; æqualis autem est CE ipsi EB; rectangulum igitur sub AD DC, una cum quadrato ex EB, æquale est ex ED quadrato. sed quadrato ex ED æqualia sunt quadrata [c] ex EB BD, siquidem rectus est angulus EBD. ergo rectangulum sub AD DC, una cum quadrato ex EB æquale est eis quæ ex EB BD fiunt quadratis. commune auferatur quadratum ex EB. reliquum igitur sub AD DC rectangulum quadrato quod fit ex DB æquale erit. Si igitur extra circulum aliquod punctum sumatur, &c. Quod oportebat demonstrare. [c] 47. primi.

PROP. XXXVII. THEOR.

Si extra circulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera vero incidat: sit autem, quod sub tota secante, & exterius assumpta inter punctum, & curvam circumferentiam continetur rectangulum, æquale ei quod ab incidente fit quadrato; incidens linea circulum continget.

Extra circulum enim ABC sumatur aliquod punctum D, atque ab ipso in circulum cadant duæ rectæ lineæ DCA, DB; DCA quidem circulum secet, DB vero incidat; sitque rectangulum sub AD DC æquale quadrato quod fit ex DB. dico ipsam DB circulum ABC contingere. Ducatur enim recta linea DE [a] contingens circulum ABC, & sumatur circuli ABC centrum, quod sit F, junganturque FE FB FD. ergo angulus FED rectus est [b]. & quoniam DE circulum ABC contingit, secat autem DCA; rectangulum sub AD DC æquale erit [c] quadrato ex DE. sed rectangulum sub AD DC ponitur æquale quadrato ex DB. quadratum igitur quod ex DE quadrato ex DB æquale erit. ac propterea linea DE erit ipsi DB æqualis. est autem & FE æqualis FB. duæ igitur DE EF duabus DB BF æquales sunt;

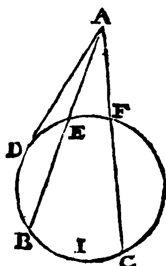


[a] 17. hujus.
[b] 18. hujus.
[c] ex antecedente.

d 8. primi. sunt; & basis communis F D; angulus igitur D E F est d æqualis angulo D B F; rectus autem est D E F, ergo & D B F est rectus. atque est F B producta diameter. quæ vero ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, circulum contingit e. ergo D B circulum A B C contingat necesse est. similiter demonstrabitur & si centrum sit in ipsa A C. Si igitur extra circulum sumatur aliquod punctum, &c. Quod demonstrare oportebat.

e Cor. 16. hujus.

Cor. Hinc si à puncto quovis extra circulum assumpto, plures lineæ rectæ A B A C circulum secantes ducantur; rectangula comprehensa sub totis lineis A B A C, & partibus externis A E A F, inter se sunt æqualia. nam si ducatur tangens A D, erit rectangulum sub B A A E æquale quadrato ex A D; & rectangulum sub C A A F eidem quadrato ex A D erit æquale. unde rectangula hæc æqualia erunt.



EUCLIDIS

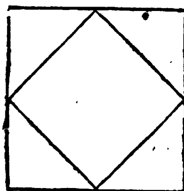
EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER QUARTUS.

DEFINITIONES.

I.

FIGURA rectilinea in figura rectilinea describi dicitur, quando unusquisque figuræ descriptæ angulus, unumquodque latus ejus in qua describitur, contingit.

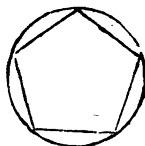


II.

Figura similiter circa figuram describi dicitur, quando unumquodque latus descriptæ, unumquemque angulum ejus circa quam describitur, contingit.

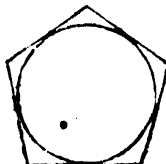
III.

Figura rectilinea in circulo describi dicitur, quando unusquisque descriptæ figuræ angulus circuli circumferentiam contingit.



IV.

Figura rectilinea circa circulum describi dicitur, quando unumquodque latus descriptæ, circuli circumferentiam contingit.



V.

Circulus similiter in figura rectilinea describi dicitur, quando circuli circumferentia unumquodque latus ejus in qua describitur, contingit.

VI.

Circulus circa figuram rectilineam describi dicitur, quando circuli circumferentia unumquemque angulum ejus circa quam describitur, contingit.

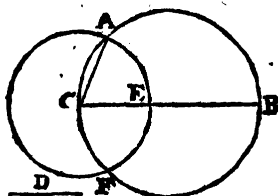
VII.

Recta linea in circulo aptari dicitur, quando ejus extrema in circuli circumferentia fuerint.

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

In dato circulo, datæ rectæ lineæ quæ diametro ejus major non sit, æqualem rectam lineam aptare.

Sit datus circulus A B C, data autem recta linea non major circuli diametro D. oportet in circulo A B C rectæ lineæ D æqualem rectam lineam aptare. Ducatur circuli A B C diameter B C. si quidem igitur B C sit æqualis ipsi D, factum jam erit quod proponebatur. etenim in circulo A B C aptata est B C rectæ lineæ D æqualis. sin minus, major est B C quam D, ponaturque * ipsi D æqualis C E : & centro quidem C intervallo autem C E circulus describatur A E F: & C A jungatur. itaque quoniam punctum C centrum est A E F circuli; erit C A ipsi C E æqualis. sed D est æqualis C E. ergo & D ipsi A C æqualis erit. in dato igitur circulo A B C datæ rectæ lineæ D, non majori circuli diametro, æqualis apata est A C. Quod facere oportebat.



* 3. primi.

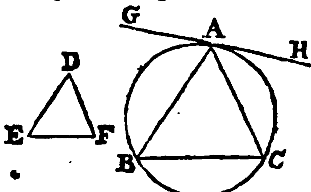
PROP. II. PROBL.

In circulo dato, dato triangulo æquiangulum triangulum describere.

Sit datus circulus A B C, datum autem triangulum D E F. oportet in A B C circulo describere triangulum triangulo D E F æquiangulum. ducatur recta linea G A H contingens * circulum

* 17. tertii.

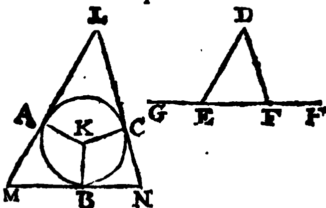
lum A B C in puncto A: & ad rectam lineam A H, & ad punctum in ea A, angulo D E F æqualis *b* angulus constituatur H A C. rursus ad rectam lineam A G, & ad punctum in ipsa A angulo D F E æqualis *b* constituatur angulus G A B; *b* 23. primi. & B C jungatur. quoniam igitur circulum A B C contingit quædam recta H A G; à contactu autem in circulum ducta est A C: erit H A C angulus æqualis *c* ei qui in alterno circuli segmento consistit, videlicet ipsi A B C. *c* 32. tertii. sed H A C angulus æqualis est angulo D E F, ergo & angulus A B C angulo D E F est æqualis. eadem ratione & angulus A C B est æqualis angulo D F E. reliquus igitur B A C angulus reliquo E D F æqualis *d* erit. ergo triangulum A B C triangulo D E F est æquiangulum, & descriptum est in circulo A B C. *d* 2. Cor. 32. primi. In dato igitur circulo dato triangulo æquiangulum triangulum descriptum est. Quod facere oportebat.



PROP. III. PROBL.

Circa datum circulum triangulo dato æquiangulum triangulum describere.

Sit datus circulus A B C, datum autem triangulum D E F. oportet circa circulum A B C describere triangulum triangulo D E F æquiangulum. Protrahatur ex utraque parte E F ad puncta H, G, & sumatur circuli A B C centrum K: & recta linea K B utcunque ducatur: constituaturque ad rectam lineam K B, & ad punctum in ea K, angulo quidem D E G æqualis *a* angulus B K A, angulo autem D F H æqualis *a* angulus B K C, & per A, B, C, puncta ducantur rectæ lineæ L A M M B N M C L circulum A B C contingentes *b*. *a* 23. primi. *b* 17. tertii. Quoniam igitur circulum A B C contingunt L M M N N L in punctis A, B, C, à centro autem K ad A B C puncta ducuntur K A K B K C; erunt anguli ad puncta A B C recti *c*. *c* 18. tertii. & quoniam quadrilateri A M B K anguli quatuor quatuor rectis æquales sunt; etenim in duo triangula dividitur, quorum anguli K A M K B M sunt recti; erunt reliqui A K B A M B duobus rectis æquales. sunt autem & D E G D E F æquales duobus rectis. anguli igitur A K B A M B angulis D E G D E F



æquales

æquales sunt, quorum AKB ipsi DEG est æqualis. ergo reliquus AMB reliquo DEF æqualis erit. similiter demonstrabitur angulus LNB ipsi DFE æqualis. ergo & reliquus MLN est æqualis [d] reliquo EDF. æquiangulum igitur est LMN triangulum triangulo DEF; & descriptum est circa circulum ABC. Quare circa datum circulum triangulo dato æquiangulum triangulum descriptum est. Quod facere oportebat.

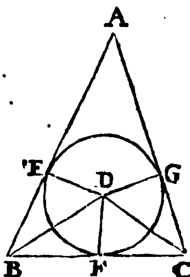
d 2. Cor. 2. primi.

PROP. IV. PROBL.

In dato triangulo circulum describere.

Sit datum triangulum ABC, oportet in triangulo ABC circulum describere. Secentur [a] anguli ABC BCA bifariam rectis lineis BD CD quæ conveniant inter se in D puncto: & à puncto D ad rectas lineas AB BC CA perpendiculares [b] ducantur DE DF DG. Quoniam angulus EBD est æqualis angulo FBD, est autem & rectus BED recto BFD æqualis: erunt duo triangula EBD DBF, duos angulos duobus angulis æquales habentia, & unum latus uni lateri æquale utrique commune BD, quod scilicet uni æqualium angulorum subtenditur. ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia [c] habebunt, atque erit DE æqualis DF. & eadem ratione DG æqualis DF. ergo & DE ipsi DG est æqualis. tres igitur rectæ lineæ DE DF DG inter se æquales sunt; quare centro D intervallo autem unius ipsarum DE DF DG circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta; & rectas lineas AB BC CA continget; propterea quòd recti sunt ad E F G anguli. si enim ipsas secet, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur intra circulum cadet, quod est absurdum [d]. non igitur centro D, intervallo autem unius ipsarum DE DF DG circulus descriptus secabit rectas lineas AB BC CA, quare ipsas continget; atque erit circulus descriptus in triangulo ABC. In dato igitur triangulo ABC circulus EFG descriptus est. Quod facere oportebat.

a 9. primi.
b 12. primi.
c 26. primi.
d 16. tertii.

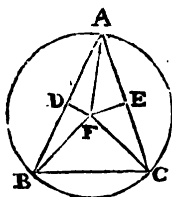


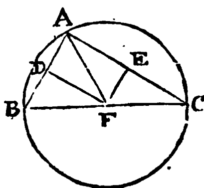
PROP.

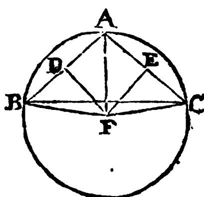
PROP. V. PROBL.

Circa datum triangulum circulum describere.

Sit datum triangulum A B C. oportet circa datum triangulum A B C. circulum describere. Secentur A B A C bifariam [a] in D, E punctis: & à punctis D E ipsis A B A C ad rectos angulos [b] ducantur D F E F quæ quidem vel intra triangulum A B C conveniant, vel in recta linea B C, vel extra ipsam. conveniant primo intra triangulum in puncto F: & [a] 10.primi. [b] 11.primi.







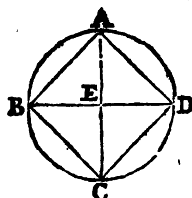
B F F C F A jungantur. quoniam igitur A D est æqualis D B, communis autem & ad rectos angulos D F; erit basis A F basi F B æqualis [c]. similiter ostendetur & C F æqualis F A. [c] 4. primi. ergo & B F est æqualis F C. tres igitur F A F B F C inter se æquales sunt. quare centro F, intervallo autem unius ipsarum F A F B F C circulus descriptus etiam per reliqua puncta transibit: atque erit circulus descriptus circa triangulum A B C. & describatur ut A B C. secundo D F E F conveniunt in recta linea B C, in puncto F, ut in secunda figura, & A F jungatur. similiter demonstrabimus punctum F centrum esse circuli circa triangulum A B C descripti. postremo D F E F conveniant extra triangulum A B C rursus in F puncto, ut in tertia figura; & jungantur A F F B F C. & quoniam rursus A D est æqualis D B, communis autem & ad rectos angulos D F, basis A F basi F B æqualis erit. similiter demonstrabimus & C F ipsi F A æqualem esse. quare & B F est æqualis F C. rursus igitur centro F, intervallo autem unius ipsarum F A F B F C circulus descriptus & per reliqua transibit puncta; atque erit circa triangulum A B C descriptus. Circa datum igitur triangulum circulus descriptus est. Quod facere oportebat.

Cor. Si triangulum sit rectangulum centrum circuli cadet in latus angulo recto oppositum. si acutangulum cadet centrum intra triangulum. si obtusangulum cadet extra.

PROP. VI. PROBL.

In dato circulo quadratum describere.

Sit datus circulus ABCD. oportet in ABCD circulo quadratum describere. Ducantur circuli ABCD diametri ad rectos angulos inter se AC BD: & AB BC CD DA jungantur. Quoniam igitur BE est æqualis ED, etenim centrum est E, communis autem, & ad rectos angulos EA; erit basis



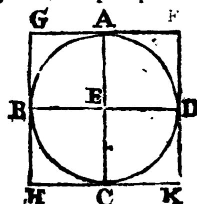
a 4. primi. BA æqualis [a] basi AD. & eadem ratione utraque ipsarum BC CD utriq; BA AD est æqualis; æquilaterum igitur est ABCD quadrilaterum. dico & rectangulum esse. quoniam enim recta linea BD diameter est ABCD circuli, erit BAD semi-

b 31. tertii. circulus. quare angulus BAD rectus [b] est. & eadem ratione unusquisque ipsorum ABC BCD CDA est rectus. rectangulum igitur est ABCD quadrilaterum. ostensum autem est, & æquilaterum esse. ergo quadratum necessario erit, & descriptum est in circulo ABCD. in dato igitur ABCD circulo quadratum ABCD descriptum est. Quod facere oportebat.

PROP. VII. PROBL.

Circa datum circulum quadratum describere.

Sit datus circulus ABCD. oportet circa ABCD circulum quadratum describere. Ducantur circuli ABCD duæ diametri AC BD ad rectos inter se angulos, & per puncta A, B, C, D ducantur circulum ABCD



a 17. tertii. contingentes [a] FG GH HK KF. Quoniam igitur FG contingit circulum ABCD, à centro autem E ad contactum qui est

b 18. tertii. ad A ducitur EA; erunt [b] anguli ad A recti. eadem ratione, & anguli ad puncta B, C, D recti sunt. & quoniam angulus AEB rectus est, est autem &

c 28. primi. rectus EBG; erit GH ipsi AC parallela [c]. eadem ratione, & AC parallela est FK. similiter demonstrabimus & utramque ipsarum GF HK ipsi BED parallelam esse. quare & GF est

d 30 primi. parallela HK. [d] parallelogramma igitur sunt GK GC AK FB

e 34. primi. BK, ac propterea GF quidem est [e] æqualis HK, GH, vero ipsi FK. & quoniam AC æqualis est BD; sed AC quidem utrique

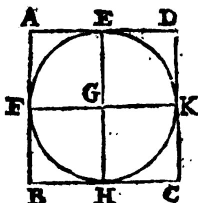
ipsa-

ipsarum G H F K est [d] æqualis; B D vero æqualis utrique G F H K, & utraque G H F K utrique G F H K æqualis erit. æquilaterum igitur est F G H K quadrilaterum. dico & rectangulum esse. quoniam enim parallelogrammum est G B E A, atque est rectus A E B angulus, & ipse A G B rectus erit. similiter demonstrabimus angulos etiam ad puncta H K F rectos esse. rectangulum igitur est quadrilaterum F G H K. demonstratum autem est & æquilaterum. ergo quadratum sit necesse est, & descriptum est circa circulum A B C D. Circa datum igitur circulum quadratum descriptum est. Quod facere oportebat.

PROP. VIII. PROBL.

In dato quadrato circulum describere.

Sit datum quadratum A B C D oportet in quadrato A B C D circulum describere. Secetur utraque ipsarum A B A D bifariam [a] in punctis F, E. & per E quidem alterutri ipsarum A B C D parallela [b] ducatur E H: per F vero ducatur F K parallela [b] alterutri A D B C. parallelogrammum igitur est unumquodque ipsorum A K K B A H H D A G G C B G G D: & latera ipsorum quæ ex opposito, sunt æqualia [c]. & quoniam D A est æqualis A B; & ipsius quidem A D dimidium est A E; ipsius vero A B dimidium A F; erit A E ipsi A F æqualis. quare & opposita latera æqualia sunt. ergo F G est æqualis G E. similiter demonstrabimus, & utramque ipsarum G H G K utrique F G G E æqualem esse. quatuor igitur G E G F G H G K inter se sunt æquales. itaque centro quidem G, intervallo autem unius ipsarum G E G F G H G K circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta, & rectas lineas A B B C C D D A continget; propterea quod anguli ad E, F, H, K, recti sunt: si enim circulus secabit rectas lineas A B B C C D D A, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur intra circulum cadet; quod [d] est absurdum non igitur centro quidem G intervallo autem unius ipsarum G E G F G H G K circulus descriptus rectas lineas A B B C C D D A secabit. quare ipsas necessario continget; atque erit descriptus in quadrato A B C D. In dato igitur quadrato circulus descriptus est. Quod facere oportebat.

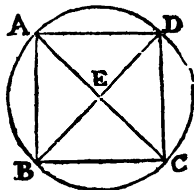


[a] 10. primi.
[b] 31. primi.
[c] 34. primi.
[d] 16. tertii.

PROP. IX. PROBL.

Circa datum quadratum circulum describere.

Sit datum quadratum A B C D. oporret circa A B C D quadratum circulum describere. Jungantur A C B D, quæ se invicem in puncto E secent. & quoniam D A est æqualis A B, communis autem A C; duæ D A A C duabus B A A C æquales sunt; & basis D C æqualis basi B C; erit angulus



a 8. primi. D A C angulo B A C æqualis a. angulus igitur D A B bifariam sectus est recta linea A C. similiter demonstrabimus unumquemque angulorum A B C B C D C D A rectis lineis A C D B bifariam sectum esse. quoniam igitur angulus D A B angulo A B C est æqualis, atque est anguli quidem D A B dimidium angulus E A B, anguli vero A B C dimidium E B A; & E A B angulus angulo E B A æqualis erit. quare & latus E A

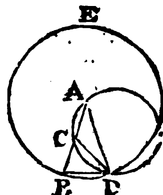
b 6. primi. lateri E B est b æquale. similiter demonstrabimus & utramque rectarum linearum E C E D utrique E A E B æqualem esse. ergo quatuor rectæ lineæ E A E B E C E D inter se sunt æquales. centro igitur E, intervallo autem unius ipsarum E A E B E C E D circulus descriptus etiam per reliqua puncta transibit; atque erit descriptus circa A B C D quadratum. describatur ut A B C D. Circa datum igitur quadratum circulus descriptus est. Quod facere oportebat.

PROP. X. PROBL.

Isosceles triangulum constituere, habens utrumque angulorum qui sunt ad basim, duplum reliqui.

Exponatur recta quædam linea A B, & secetur in C puncto, ita ut rectangulum contentum sub A B B C æquale a sit

a 11. secundi. ei, quod ex C A describitur, quadrato: & centro quidem A, intervallo autem A B circulus describatur B D E; apteturque in B D E circulo recta li-



b 1. hujus. nea B D æqualis b ipsi A C quæ non est major diametro circuli B D E: & junctis D A D C, cir-

c 5. hujus. ca A D C triangulum c circulus A C D describatur. itaque quoniam rectangulum A B C æquale est quadrato quod fit ex

A C;

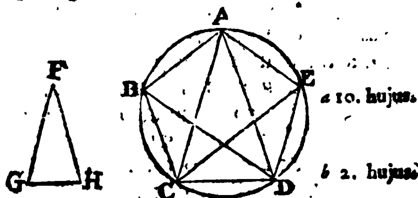
AC; æqualis autem est AC ipsi BD; erit sub AB BC rectangulum quadrato ex BD æquale. & quoniam extra circulum ACD sumptum est aliquod punctum B, & à puncto B in circulum ACD cadunt duæ rectæ lineæ BCA BD, quarum altera quidem secat, altera vero incidit; atque est rectangulum sub AB BC æquale quadrato ex BD: recta linea BD circulum ACD [c] continget. quoniam igitur BD contingit, & à contacta ad D ducta est DC; erit BDC angulus æqualis [d] ei qui in alterno circuli segmento constituitur, videlicet angulo DAC. quod cum angulus BDC æqualis sit ipsi DAC, communis apponatur CDA; totus igitur BDA est æqualis duobus angulis CDA DAC. sed ipsis CDA DAC exterior angulus BCD est [e] æqualis. ergo & BDA æqualis est ipsi BCD. sed BDA angulus est [f] æqualis angulo CBD, quoniam & latus AD lateri AB est æquale. ergo & DBA ipsi BCD æqualis erit. tres igitur anguli BDA DBA BCD inter se æquales sunt. & quoniam angulus DBC æqualis est angulo BCD, & latus BD lateri DC est [g] æquale. sed BD ponitur æqualis ipsi CA. ergo & CA est æqualis CD. quare & angulus CDA æqualis est angulo DAC. anguli igitur CDA DAC simul sumpti ipsius anguli DAC duplices sunt. est autem & BCD angulus angulis CDA DAC æqualis; ergo & BCD duplex est ipsius DAC. sed BCD est æqualis alterutri ipsorum BDA DBA. quare & uterque BDA DBA ipsius DAB est duplex. Isosceles igitur triangulum constitutum est ADB habens utrumque eorum angulorum qui sunt ad basim, duplum reliqui. Quod facere oportebat.

[c] 37. tertii.
[d] 32. tertii.
[e] 32. primi.
[f] 5. primi.
[g] 6. primi.

PROP. XI. PROBL.

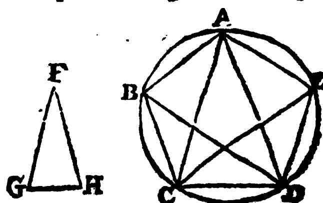
In dato circulo pentagonum æquilaterum & æquiangulum describere.

Sit datus circulus ABCDE. oportet in ABCDE circulo pentagonum æquilaterum & æquiangulum describere. Exponatur triangulum isosceles FGH habens utrumque eorum qui sunt ad basim GH angulorum, duplum [a] anguli qui est ad F: & describatur in circulo ABCDE triangulo FGH æquiangulum [b] triangulum ACD, ita ut angulo quidem qui est ad F æqualis sit angulus CAD; utrique vero ipsorum qui ad G H, sit æqualis uterque ACD CDA. & uterque



[a] 10. hujus.
[b] 2. hujus.

uterque igitur ACD CDA anguli CAD est duplus. secetur
c 9. primi. uterque ipsorum ACD CDA bifariam c rectis lineis CE DB: & AB BC DE EA jungantur. quoniam igitur uterque ipsorum ACD CDA duplus est ipsius CAD, & secti sunt bifariam rectis lineis CE DB, quinque anguli DAC ACE ECD CDB BDA inter se sunt æquales. æquales autem anguli in æqualibus circumferentiis insistunt d. quinque
d 26. tertii.



igitur circumferentiæ AB BC CD DE EA æquales sunt inter se. sed æquales circumferentias e æquales rectæ lineæ subtendunt. ergo & quinque rectæ lineæ AB BC CD DE EA inter se æquales sunt. æquilaterum igitur est ABCDE pentagonum. dico & æquiangulum esse. quoniam enim circumferentia AB æqualis est circumferentiæ DE, communis apponatur BCD. tota igitur ABCD circumferentia toti circumferentiæ EDCB est æqualis, & in circumferentia quidem ABCD insistit angulus AED, in circumferentia vero EDCB insistit BAE. ergo & BAE angulus est æqualis angulo AED. eadem ratione & unusquisque angulorum ABC BCD CDE unicuique ipsorum BAE AED est æqualis. æquiangulum igitur est ABCDE pentagonum: ostensum autem est & æquilaterum esse. Quare in dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum descriptum est. Quod facere oportebat.
e 29. tertii.

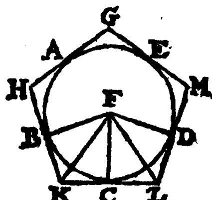
PROP. XII. PROBL.

Circa datum circulum pentagonum æquilaterum & æquiangulum describere.

Sit datus circulus ABCDE. oportet circa circulum ABCDE pentagonum æquilaterum & æquiangulum describere. Intelligantur pentagoni in circulo descripti a angulorum puncta esse ABCDE, ita ut circumferentiæ AB BC CD DE EA sint æquales; & per puncta A, B, C, D, E, ducantur b circulum contingentes GH HK KL LM MG, & sumpto circuli ABCDE centro F, jungantur FB FK FC FL FD. quoniam igitur recta linea KL contingit circulum ABCDE in puncto C, & a centro F ad contactum qui est ad C ducta est FC, erit FC ad ipsam KL perpendicularis c. rectus igitur est uterque angulorum qui sunt ad C. eadem ratione & anguli qui ad puncta B D recti sunt. & quoniam rectus angulus est FCK, quadra-

a per 11. hujus.
b 17. tertii.
c 18. tertii.

quadratum quod fit ex FK æquale [d] est quadratis ex FC [d 47. primi.] CK. & ob eandem causam quadratis ex FB BK æquale est ex FK quadratum. quadrata igitur ex FC CK quadratis ex FB BK æqualia sunt, quorum quod ex FC ei quod ex FB est æquale. ergo reliquum quod ex CK reliquo quod ex BK æquale erit. æqualis igitur est BK



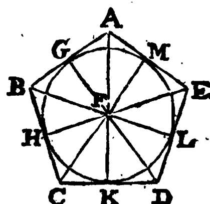
ipsi CK. & quoniam FB est æqualis FC, communis autem FK, duæ BF FK duabus CF FK æquales sunt; & basis BK est æqualis basi KC; erit angulus [e] itaque BFK angulo [e 8. primi.] KFC æqualis, angulus vero BKF angulo FKC. duplus igitur est angulus BFC anguli KFC, & angulus BKC duplus ipsius FKC. eadem ratione, & angulus CFD anguli CFL est duplus: angulus vero CLD duplus anguli CLF. & quoniam circumferentia BC circumferentiæ CD est æqualis, & angulus BFC angulo CFD æqualis [f] erit. atque est [f 27. tertii.] angulus quidem BFC anguli KFC duplus: angulus vero DFC duplus ipsius LFC. æqualis igitur est angulus KFC angulo CFL. itaque duo triangula sunt FKC FLC, duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & unum latus uni lateri æquale quod ipsis commune est FC: ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt [g], [g 26. primi.] & reliquum angulum reliquo angulo æqualem. recta igitur linea KC est æqualis rectæ CL, & angulus FKC angulo FLC. & quoniam KC est æqualis CL, erit KL ipsius KC dupla. eadem ratione, & HK ipsius BK dupla ostendetur. rursus quoniam BK ostensa est æqualis ipsi KC, atque est KL quidem dupla KC, HK vero ipsius BK dupla: erit HK ipsi KL æqualis. similiter & unaquæque ipsarum GH GM ML ostendetur æqualis utrique HK KL. æquilaterum igitur est GHKLM pentagonum. dico etiam æquiangulum esse. quoniam enim angulus FKC est æqualis angulo FLC; & ostensus est angulus HKL duplus ipsius FKC; ipsius vero FLC duplus KLM: erit & HKL angulus angulo KLM æqualis. simili ratione ostendetur & unusquisque ipsorum KHG HGM GML utrique HKL KLM æqualis. quinque igitur anguli GHK HKL KLM LMG MGH inter se æquales sunt. ergo æquiangulum est GHKLM pentagonum. ostensum autem est etiam æquilaterum esse: & descriptum est circa ABCDE circulum. Quod facere oportebat.

PROP.

PROP. XIII. PROBL.

In dato pentagono, quod æquilaterum & æquiangulum sit, circulum describere.

Sit datum pentagonum æquilaterum & æquiangulum ABCDE. oportet in ABCDE pentagono circulum describere.
a 9. primi. Secetur uterque angulorum BCD CDE bifariam a rectis lineis CF DF; & a puncto F in quo conveniunt inter se CF DF ducantur rectæ lineæ FB FA FE. Quoniam igitur BC est æqualis CD, communis autem CF, duæ BC CF, duabus DC CF æquales sunt, & angulus BCF est æqualis angulo DCF. basis igi-
b 4. primi. tur BF basi FD est b æqualis, & BFC triangulum æquale triangulo DCF, & reliqui anguli reliquis angulis æquales,



quibus æqualia latera subtenduntur; angulus igitur CBF angulo CDF æqualis erit. & quoniam angulus CDE anguli CDF est duplus, & angulus quidem CDE angulo ABC æqualis, angulus vero CDF angulo CBF æqualis; erit & CBA angulus duplus anguli CBF; ac propterea angulus ABF angulo CBF æqualis. angulus igitur ABC bifariam sectus est recta linea BF. similiter demonstrabitur unumquemque angulorum BAE AED rectis lineis AF FE bifariam sectum esse. à puncto F ad rectas lineas AB BC CD DE EA ducantur
c 12. primi. c perpendiculares FG FH FK FL FM. & quoniam angulus HCF est æqualis angulo KCF; est autem & rectus FHC recto FKC æqualis: erunt duo triangula FHC FKC, duos angulos duobus angulis æquales habentia, & unum latus uni lateri æquale, commune scilicet utrisque FC, quod uni æqualium angulorum subtenditur. ergo & reliqua latera re-
d 26. primi. liquis lateribus æqualia d habebunt, atque erit perpendicularis FH perpendiculari FK æqualis. similiter ostendetur & unaquæque ipsarum FL FM FG æqualis utrique FH FK. quinque igitur rectæ lineæ FG FH FK FL FM inter se æquales sunt. quare centro F intervallo autem unius ipsarum FG FH FK FL FM, circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta, & rectas lineas AB BC CD DE EA continget; propterea quod anguli ad GHKLM recti sunt. si enim non continget, sed ipsas secet, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, intra circulum cadet,
e 16. tertii. quod absurdum e esse ostensum est. non igitur centro F, &

inter-

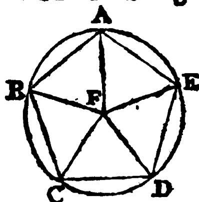
intervallo uno ipsorum punctorum G H K L M circulus descriptus rectas lineas A B BC CD DE EA secabit. quare ipsas contingat necesse est. describatur ut G H K L M. In dato igitur pentagono quod est æquilaterum, & æquiangulum circulus descriptus est. Quod facere oportebat.

Cor. Si duo anguli proximi figuræ æquilateræ & æquiangulæ bisecentur, & à puncto in quo coëunt lineæ angulum bisecantes, ducantur rectæ lineæ ad reliquos figuræ angulos, omnes anguli figuræ erunt bisecti.

PROP. XIV. PROBL.

Circa datum pentagonum quod æquilaterum & æquiangulum sit, circulum desciberé.

Sit datum pentagonum æquilaterum & æquiangulum A B C D E. oportet circa pentagonum A B C D E circulum describere. Secetur uterque ipsorum B C D. C D E angulorum bifariam ᵃ rectis lineis C F F D: a 9. primi.



& à puncto F in quo conveniunt rectæ lineæ, ad puncta B A E ducantur F B F A F E. & unusquisque angulorum C B A B A E A E D rectis lineis B F F A F E bifariam ᵇ sectus erit. & quoniam angulus B C D angulo C D E est æqualis; atque est anguli quidem B C D dimidium angulus F C D, anguli vero C D E dimidium C D F; erit & F C D angulus æqualis angulo F D C, quare & latus C F lateri F D est æquale ᶜ. similiter demonstrabitur & unaquæque ipsarum F B F A F E æqualis unicuique F C F D. quinque igitur rectæ lineæ F A F B F C F D F E inter se æquales sunt. ergo centro F, & intervallo unius ipsarum F A F B F C F D F E, circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta: atque erit descriptus circa pentagonum A B C D E quod æquilaterum est & æquiangulum. describatur, & sit A B C D E. Circa datum igitur pentagonum æquilaterum & æquiangulum circulus descriptus est. Quod facere oportebat.

b Cor. precedente.
c 6. primi.

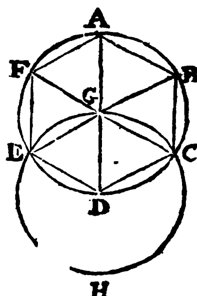
PROP. XV. PROBL.

In dato circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

Sit datus circulus A B C D E F. oportet in circulo A B C D E F hexagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

Duca-

Ducatur circuli ABCDEF diameter AD, sumaturque centrum circuli G; & centro quidem D, intervallo autem DG circulus describatur EGCH, junctæ EG CG ad puncta B F producantur, & jungantur AB BC CD DE EF FA. dico hexagonum ABCDEF æquilaterum & æquiangulum esse. Quoniam enim G punctum centrum est ABCDEF circuli, erit GE ipsi GD æqualis. rursus quoniam D centrum est circuli EGCH, erit DE æqualis DG: sed GE ipsi GD æqualis ostensa est. ergo GE ipsi ED est æqualis. æquilaterum igitur est EGD triangulum, ideoque tres ipsius anguli EGD GDE DEG inter se æquales [a] sunt; & sunt trianguli tres anguli æquales [b] duobus rectis. angulus igitur EGD duorum rectorum tertia pars est. similiter ostendetur & DGC duorum rectorum tertia pars. & quoniam recta linea CG super rectam EB insistens, angulos qui deinceps sunt EGC CGB duobus rectis æquales [c] efficit; erit & reliquus CGB tertia pars duorum rectorum. anguli igitur EGD DGC CGB inter se sunt æquales. & qui ipsis ad verticem sunt anguli BGA AGF FGE æquales [d] sunt angulis EGD DGC CGB. quare sex anguli EGD DGC CGB BGA AGF FGE inter se æquales sunt. sed æquales anguli æqualibus circumferentiis insistunt [e]. sex igitur circumferentiæ AB BC CD DE EF FA inter se sunt æquales: æquales autem circumferentias æquales [f] rectæ lineæ subtendunt. ergo & sex rectæ lineæ inter se æquales sint necesse est. ac propterea æquilaterum est ABCDEF hexagonum. dico & æquiangulum esse. quoniam enim circumferentia AF circumferentiæ ED est æqualis, communis apponatur circumferentia ABCD: tota igitur FABCD circumferentia æqualis est toti circumferentiæ EDCBA. & circumferentiæ quidem FABCD angulus FED insistit, circumferentiæ vero EDCBA insistit angulus AFE. angulus igitur AFE angulo DEF est [g] æqualis. similiter ostendentur & reliqui anguli hexagoni ABCDEF sigillatim æquales utrique ipsorum AFE FED. ergo æquiangulum est ABCDEF hexagonum. ostensum autem est & æquilaterum esse: & descriptum est circulo ABCDEF. In dato igitur circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum descriptum est. Quod facere oportebat.



[a] Cor. 5. primi.
[b] 32. primi.
[c] 13. primi.
[d] 15. primi.
[e] 26. tertii.
[f] 29. tertii.
[g] 27. tertii.

Ex hoc manifestum est hexagoni latus, ei quæ est ex centro circuli æquale esse. & si per puncta ABCDEF contingentes circulum ducamus, circa circulum describetur hexa-

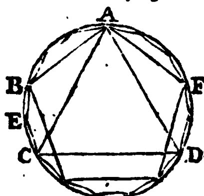
hexagonum æquilaterum & æquiangulum, consequenter iis quæ in pentagono dicta sunt: & præterea similiter in dato hexagono circulum inscribemus, & circumscribemus. Quod facere oportebat.

PROP. XVI. PROBL.

In dato circulo quindecagonum æquilaterum & æquiangulum describere.

Sit datus circulus ABCD. oportet in ABCD circulo quindecagonum *æquilaterum & æquiangulum describere. Sit AC latus trianguli [a] quidem æquilateri in ipso circulo ABCD describti, pentagoni [b] vero æquilateri latus AB, quarum igitur partium est ABCDF circulus quindecim, earum circumferentia quidem ABC, tertia existens circuli, erit quinque; circumferentia vero AB, quæ quinta est circuli, erit trium. ergo reliqua BC est duarum. secetur BC bifariam in puncto E [c]. quare utraque ipsarum BE EC circumferentiarum quintadecima pars est ABCD circuli. si igitur jungentes BE EC, æquales ipsis in continuum rectas lineas in circulo [d] ABCD aptemus, in ipso quindecagonum æquilaterum & æquiangulum descriptum erit. Quod facere oportebat.

a 2. hujus.
b 11. hujus.
c 30. tertii.
d 1. hujus.



Similiter autem iis quæ dicta sunt in pentagono, si per circuli divisiones, contingentes circulum ducamus, circa ipsum describetur quindecagonum æquilaterum & æquiangulum. & insuper dato quindecagono æquilatero & æquiangulo circulum inscribemus, & circumscribemus.

---

* *Facillimè describitur latus* AC *per prop. præced. si enim duo latera hexagoni circulo inscribantur ab* A *versus* C, *horum opposita extrema incident in puncta* A, C *extrema lateris trianguli quæsiti.*

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER QUINTUS.

DEFINITIONES.

I.

PARS est magnitudo magnitudinis, minor majoris, quando minor majorem metitur.

II.

Multiplex est major minoris, quando majorem minor metitur.

III.

Proportio seu ratio est duarum magnitudinum ejusdem generis, secundum quantitatem, mutua quædam habitudo.

IV.

Proportionem habere inter se magnitudines dicantur, quæ multiplicatæ se invicem superare possunt.

V.

In eadem proportione magnitudines esse dicuntur, prima ad secundam & tertia ad quartam, quando primæ & tertiæ æque multiplices, secundæ & quartæ æque multiplices, juxta quamvis multiplicationem, utraque utramque, vel unà superant, vel unà æquales sunt, vel unà deficiunt, inter se comparatæ.

VI.

Magnitudines quæ eandem proportionem habent, proportionales vocentur.

Ea

Ea magnitudinum Proportionalium definitio vulgo apud Interpretes traditur, quam Euclides in Elemento septimo, pro numeris solum posuit. scil.

Magnitudines dicuntur esse proportionales, quando Prima Secundæ & Tertia Quartæ æquemultiplex est, vel eædem partes.

Sed hæc definitio Numeris & quantitatibus commensurabilibus tantum competit; Adeoque cum Universalis non sit, recte ab Euclide in hoc elemento omnium Proportionalium proprietates tradituro rejicitur; & alia generalis substituitur cuivis magnitudinum speciei congruens. Interim multum laborant Interpretes ut Definitionem hîc loci ab Euclide expositam, ex vulgo recepta numerorum Proportionalium definitione demonstrent; sed facilius multo hæc ab illa fluit quam illa ab hac. Quod sic ostendetur.

Primo *Sint* A B C D *quatuor magnitudines quæ sunt in eadem ratione; prout in definitione* 5[ta] *magnitudines in eadem ratione esse exponuntur. Sitque Prima multiplex secundæ, dico & tertiam eandem esse multiplicem Quartæ. Sit ex gr.* A *æqualis* 5 B, *erit* C *æqualis* 5 D. *Capiatur numerus quilibet v. gr.* 2. *per quem multiplicitur* 5 *& productus sit* 10: *Et magnitudinum* A *&* C *Primæ & Tertiæ capiantur æque multiplices*

A:	B::	C:	D
2A	10B	2C	10D

2A 2C. *Item magnitudinum* B *&* D *Secundæ & Quartæ capiantur æque multiplices* 10B, *&* 10D. *Et per defin. quintam, si* 2A *sint æquales* 10B, *erunt* 2C. *æquales* 10D. *at quia* A *est quintuplex ex hypothesi ipsius* B, *erunt* 2A *æquales* 10B. *unde &* 2C *æquales* 10D. *&* C *æqualis* 5D, *hoc est erit* C *quintuplex ipsius* D. *q. e. d.*

Secundo. *Si* A *ſit pars quævis ipſius* B, *erit* C *eadem pars ipſius* D. *Nam quia eſt* A *ad* B. *ſicut* C *ad* D. *cumque* A *ſit pars quædam ipſius* B, *erit* B, *multiplex ipſius* A; *adeoque per priorem caſum* D *erit eadem multiplex ipſius* C & *proinde* C *eadem pars erit magnitudinis* D *ac eſt* A *ipſius* B. *q. e. d.*

Tertio. *Sit* A *æqualis quotlibet quarumvis partium ipſius* B. *dico &* C *eſſe æqualem totidem ſimilium partium ipſius* D. *v. gr.* A *in ſe contineat quartam partem ipſius* B *quinquies; hoc eſt, ſit* A *æqualis* $\frac{5}{4}$B, *dico &* C *eſſe æqualem* $\frac{5}{4}$D. *Nam quoniam* A *eſt æqualis* $\frac{5}{4}$B; *multiplicando utramque per* 4, *erunt* 4A *æquales* 5B. *Capiantur itaque æque multiplices Primæ & Tertiæ ſcil.* 4A & 4C; *item aliæ æque multiplices Secundæ & Quartæ ſcil.* 5B 5D. & *per definitionem, ſi* 4A *ſint æquales* 5B, *erunt* 4C *æquales* 5D. *at oſtenſum eſt* 4A *æquales eſſe* 5B. *adeoque &* 4C *æquales erunt* 5D, & C *æqualis* $\frac{5}{4}$D. *q. e. d.*

A: B:: C: D.

4A 5B 4C 5D

Univerſaliter ſit A *æqualis* $\frac{n}{m}$B, *erit* C *æqualis* $\frac{n}{m}$D. *multiplicentur enim* A & C *per* m. *Et* B & D *per* n. *Et quoniam eſt* A *æqualis* $\frac{n}{m}$B, *erit* mA *æqualis* nB; *unde per def.* 5 tam *erit* mC *æqualis* nD; & C *æqualis* $\frac{n}{m}$D. *q. e. d.*

A: B:: C: D.

mA nB mC nD

VII.

VII.

Quando autem æque multiplicium, multiplex quidem mæ ſuperaverit multiplicem ſecundæ, multiplex vero t non ſuperaverit multiplicem quartæ, tunc prima ad ſe dam majorem proportionem habere dicitur quam tert quartam.

VIII.

Analogia eſt proportionum ſimilitudo.

IX.

Analogia vero in tribus terminis ad minimum conſiſ

X.

Quando tres magnitudines proportionales ſunt, pri tertiam, duplicatam proportionem habere dicetur ejus habet ad ſecundam.

XI.

Quando autem quatuor magnitudines ſunt proportic prima ad quartam, triplicatam habere proportionem e ejus quam habet ad ſecundam, & ſemper deinceps, ur plius, quoad analogia proceſſerit.

XII.

Homologæ, vel ſimilis rationis magnitudines, di antecedentes quidem antecedentibus, conſequentes conſequentibus.

XIII.

Alterna ſeu permutata ratio eſt ſumptio anteceden antecedentem, & conſequentis ad conſequentem.

XIV.

Inverſa ratio eſt ſumptio conſequentis ut antece ad antecedentem, ut ad conſequentem.

XV.

Compoſitio rationis eſt ſumptio antecedentis un conſequente, tanquam unius, ad ipſam conſequentem

XVI.

Diviſio rationis eſt ſumptio exceſſus quo anteceden rat conſequentem, ad ipſam conſequentem.

XVII.

Converſio rationis eſt ſumptio antecedentis ad exceſſum quo antecedens ipſam conſequentem ſuperat.

XVIII.

Ex æquo ſive ex æqualitate ratio eſt, cum plures magnitudines extiterint, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur & in eadem proportione, fueritque ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, ita in ſecundis magnitudinibus prima ad ultimam: vel aliter, eſt ſumptio extremarum per ſubtractionem mediarum.

XIX.

Ordinata proportio eſt, quando fuerit ut antecedens ad conſequentem, ita antecedens ad conſequentem; ut autem conſequens ad aliam quampiam, ita conſequens ad aliam quampiam.

XX.

Perturbata vero proportio eſt, quando tribus exiſtentibus magnitudinibus, & aliis ipſis numero æqualibus, fuerit ut in primis magnitudinibus antecedens ad conſequentem, ita in ſecundis magnitudinibus antecedens ad conſequentem, ut autem in primis magnitudinibus conſequens ad aliam quampiam, ita in ſecundis alia quæpiam ad antecedentem.

AXIOMATA.

I.

Ejuſdem ſive æqualium æque multiplices inter ſe æquales ſunt.

II.

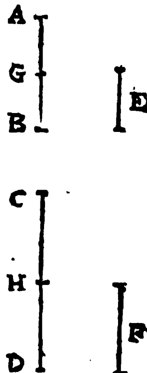
Quarum eadem æque multiplex eſt, vel quarum æquales ſunt æque multiplices, & ipſæ inter ſe ſunt æquales.

PROPOSITIO I. THEOREMA.

Si fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, æqualium numero, ſingulæ ſingularum æque multiplices; quotuplex eſt una magnitudo unius, totuplices erunt & omnes omnium.

Sint quotcunque magnitudines A B C D, quotcunque magnitudinum E F, æqualium numero, ſingulæ ſingularum æque mul-

multiplices. dico quotuplex est AB ipsius E, totuplices esse & AB CD simul ipsarum E F simul. Quoniam enim AB æque multiplex est ipsius E, ac CD ipsius F; quot magnitudines sunt in AB æquales ipsi E, tot erunt & in CD æquales ipsi F. dividatur AB quidem in partes ipsi E æquales, quæ sint AG GB; & CD dividatur in partes æquales ipsi F, videlicet CH HD. erit igitur multitudo partium CH HD æqualis multitudini ipsarum AG GB. & quoniam AG est æqualis E, & CH æqualis F; erunt & AG CH æquales ᵃ ipsis E F. eadem ratione quoniam GB est æqualis E, & HD ipsi F; erunt GB HD æquales ᵃ ipsis E F. quot sunt itaque in AB æquales ipsi E, tot sunt & in AB CD æquales ipsis E F. ergo quotuplex est AB ipsius E, totuplices erunt & AB CD simul ipsarum E F simul. Si igitur fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, æqualium numero, singulæ singularum æque multiplices; quotuplex est una magnitudo unius, totuplices erunt & omnes omnium. Quod demonstrare oportebat.

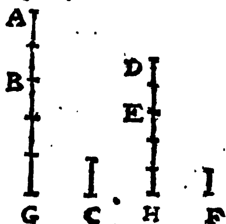


ᵃ Axiom. 1. primi.

PROP. II. THEOR.

Si prima secundæ æque multiplex fuerit ac tertia quartæ, fuerit autem & quinta secundæ æque multiplex ac sexta quartæ; erit etiam composita prima cum quinta secundæ æque multiplex ac tertia cum sexta quartæ.

Sit prima AB secundæ C æque multiplex, ac tertia DE quartæ F. sit autem & quinta BG secundæ C æque multiplex, ac sexta EH quartæ F. dico & compositam primam cum quinta scil. AG secundæ C æque multiplicem esse, ac tertiam cum sexta sc. DH quartæ F. Quoniam enim AB æque multiplex est C, ac DE ipsius F; quot magnitudines sunt in AB æquales C, tot erunt & in DE æquales F. eadem ratione & quot sunt in BG æquales C, tot & in EH erunt æquales F. quot igitur sunt in tota AG æquales C, tot erunt & in tota DH æquales F. ergo quotuplex est AG ipsius C, totuplex est & DH



DH ipsius F. & composita igitur prima cum quinta AG secundæ C æque multiplex erit, ac tertia cum sexta DH quartæ F. quare si prima secundæ æque multiplex fuerit, ac tertia quartæ, fuerit autem & quinta secundæ æque multiplex, ac sexta quartæ; erit composita quoque prima cum quinta æque multiplex secundæ, ac tertia cum sexta quartæ. Quod oportebat demonstrare.

PROP. III. THEOR.

Si prima secundæ æque multiplex fuerit ac tertia quartæ; sumantur autem æque multiplices primæ & tertiæ; erit &, ex æquali, sumptarum utraque utriusque æque multiplex, altera quidem secundæ, altera vero quartæ.

Sit prima A secundæ B æque multiplex ac tertia C quartæ D: & sumantur ipsarum A C æque multiplices EF GH, dico EF æque multiplicem esse ipsius B, ac GH ipsius D. Quoniam enim EF æque multiplex est ipsius A, ac GH ipsius C; quot magnitudines sunt in EF æquales A, tot erunt & in GH æquales C. dividatur EF quidem in magnitudines ipsi A æquales EK KF; GH vero dividatur in magnitudines æquales C, videlicet GL LH. erit igitur ipsarum EK KF multitudo æqualis multitudini ipsarum GL LH. & quoniam æque multiplex est A ipsius B ac C ipsius D; æqualis autem EK ipsi A, & GL ipsi C; erit EK æque multiplex ipsius B, ac GL ipsius D. eadem ratione æque multiplex erit KF ipsius B, ac LH ipsius D. quoniam igitur prima EK secundæ B æque multiplex est, ac tertia GL quartæ D; est autem & quinta KF secundæ B æque multiplex ac sexta LH quartæ D: erit & composita prima cum quinta EF, secundæ B æque multiplex a, ac tertia cum sexta GH, quartæ D. Si igitur prima secundæ æque fuerit multiplex ac tertia quartæ, sumantur autem primæ & tertiæ æque multiplices: erit &, ex æquali, sumptarum utraque utriusque æque multiplex, altera quidem secundæ, altera vero quartæ. Quod ostendisse oportuit.



a 2. hujus.

PROP.

PROP. IV. THEOR.

Si prima ad secundam eandem habet proportione quam tertia ad quartam: & æque multiplices prin & tertiæ ad æque multiplices secundæ & quart juxta quamvis multiplicationem, eandem proport nem habebunt, inter se comparatæ.

Prima A ad secundam B eandem proportionem hab quam tertia C ad quartam D: & sumantur ipsarum quid A C utcunque æque multiplices E F; ipsarum vero B D aliæ utcunque æque multiplices G H. dico E ad G ita esse ut F ad H. Sumantur rursus ipsarum E F æque multiplices K L, & ipsarum G H æque multiplices M N. quoniam igitur E æque multiplex est ipsius A, atque F ipsius C; sumuntur autem ipsarum E F æque multiplices K L: erit K æque multiplex *a* ipsius A, atque L ipsius C. eadem ratione M æque multiplex erit ipsius B, atque N ipsius D. & quoniam est ut A ad B ita C ad D. sumptæ autem sunt ipsarum A C æque multiplices K L; & ipsarum B D aliæ utcunque æque multiplices M N: *b* si K superat M, superabit & L ipsam N; & si æqualis æqualis; & si minor minor. suntque K L quidem ipsarum E F æque multiplices; M N vero ipsarum G H aliæ utcunque æque multiplices. ut igitur E ad G ita *c* erit F ad H. quare si prima ad secundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam; & æque multiplices primæ ac tertiæ ad multiplices secundæ ac quartæ, juxta quamvis multipli nem, eandem proportionem habebunt, inter se comp Quod demonstrare oportebat.

Quoniam igitur demonstratum est si K superat M, ipsam N superare; & si æqualis, æqualem esse, & si n minc

minorem; constat etiam si M superat K, & N superare ipsam L; & si æqualis, æqualem esse; & si minor, minorem; ac propterea ut G ad E [c] ita esse H ad F.

c 5. Defin. hujus.

Cor. Ex hoc manifestum est, si quatuor magnitudines sint proportionales, & inverse proportionales esse.

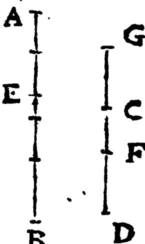
PROP. V. THEOR.

Si magnitudo magnitudinis æque multiplex sit atque ablata ablatæ; & reliqua reliquæ æque multiplex erit ac tota totius.

Magnitudo AB magnitudinis CD æque multiplex sit atque ablata AE ablatæ CF. dico & reliquam EB reliquæ FD æque multiplicem esse atque totam AB totius CD; Quotuplex enim est AE ipsius CF, totuplex fiat & EB ipsius CG. & quoniam AE æque multiplex est CF atque EB ipsius CG; erit [a] AE æque multiplex CF, ac AB ipsius GF; ponitur autem æque multiplex AE ipsius CF, ac AB ipsius CD. æque multiplex igitur est AB utriusque GF CD; ac propterea GF ipsi CD est [b] æqualis. communis auferatur CF. reliqua igitur GC æqualis est reliquæ DF. itaque quoniam AE æque multiplex est CF, ac EB ipsius CG, estque CG æqualis DF; erit AE æque multiplex CF, ac EB ipsius FD. æque multiplex autem ponitur AE ipsius CF, ac AB ipsius CD. ergo EB est æque multiplex FD, ac AB ipsius CD. & reliqua igitur EB reliquæ FD æque multiplex est, atque tota AB totius CD. Quare si magnitudo magnitudinis æque multiplex sit atque ablata ablatæ: & reliqua reliquæ æque erit multiplex, ac tota totius. Quod oportebat demonstrare.

a 1. hujus.

b 2. Axiom. hujus.

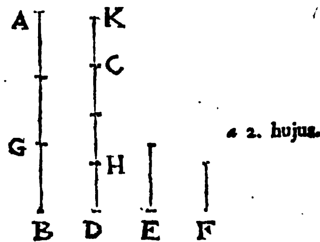


PROP. VI. THEOR.

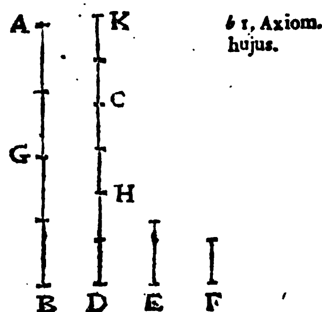
Si duæ magnitudines duarum magnitudinum æque multiplices sint & ablatæ quædam sint earundem æque multiplices: erunt & reliquæ vel eisdem æquales, vel ipsarum æque multiplices:

Duæ magnitudines AB CD duarum magnitudinum E F æque multiplices sint, & ablatæ AG CH earundem sint æque multiplices. dico & reliquas GB HD vel ipsis E F æquales esse,

esse, vel ipsarum æque multiplices. Sit enim primo G B æqualis E. dico & H D ipsi F esse æqualem. ponatur ipsi F æqualis C K. & quoniam A G æque multiplex est E ac C H ipsius F; estque G B quidem æqualis E; C K vero æqualis F: erit A B æque multiplex *a* E, ac K H ipsius F. æque autem multiplex ponitur A B ipsius E, ac C D ipsius F. ergo K H æque multiplex est F, ac C D ipsius F. quoniam igitur utraque ipsarum K H C D est æque multiplex F, erit K H æqualis *b* C D. communis auferatur C H. ergo reliqua K C reliquæ H D est æqualis. sed K C est æqualis F. & H D igitur ipsi F est æqualis; ideoque G B ipsi E, & H D ipsi F æqualis erit. similiter demonstrabimus si G B multiplex fuerit ipsius E; & H D ipsius F æque multiplicem esse. Si igitur duæ magnitudines duarum magnitudinum æque multiplices sint, & ablatæ quædam sint earundem æque multiplices; erunt & reliquæ, vel eisdem æquales, vel ipsarum æque multiplices. Quod demonstrare oportebat.



a 2. hujus.

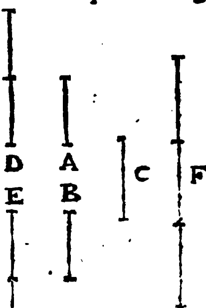


b 1. Axiom. hujus.

PROP. VII. THEOR.

Æquales ad eandem eandem habent proportionem, & eadem ad æquales.

Sint æquales magnitudines A B, alia autem quævis magnitudo C. dico utramque ipsarum A B ad C eandem proportionem habere: & C ad utramque A B similiter eandem habere proportionem. Sumantur ipsarum A B æque multiplices D E, & ipsius C alia utcunque multiplex F. quoniam igitur æque multiplex est D ipsius A, ac E ipsius B, estque A ipsi B æqualis; erit & D æqualis *a* E; alia autem utcunque multiplex ipsius C est F. ergo si D superat F, & E ipsam F superabit, & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. & sunt D E qui-



a 1. Axiom. hujus.

dem

dem ipsarum A B æque multiplices: F vero alia utcunque multiplex ipsius C. erit igitur [b] ut A ad C. ita B ad C. dico insuper C ad utramque ipsarum A B eandem habere proportionem. Iisdem enim constructis similiter ostendemus D ipsi E æqualem esse, si igitur F superat D, ipsam quoque E superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. atque est F quidem ipsius C multiplex; D E vero aliæ utcunque æque multiplices ipsarum A B. ergo [b] ut C ad A, ita erit C ad B. Æquales igitur ad eandem, eandem habent proportionem, & eadem ad æquales. Quod ostendere oportebat.

b 5. Defin. hujus.

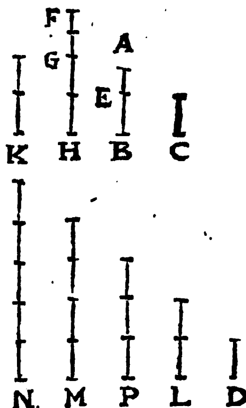
PROP. VIII. THEOR.

Inæqualium magnitudinum major ad eandem, majorem habet proportionem, quam minor. & eadem ad minorem, majorem proportionem habet, quam ad majorem.

Sint inæquales magnitudines, A B, C, & sit A B major. sit alia vero utcunque D. dico A B ad D majorem habere proportionem quam C ad D. & D ad C majorem habere proportionem quam ad A B. Quoniam A B major est quam C, ponatur ipsi C æqualis B E, hoc est A B excedat C per A E. itaque A E aliquoties multiplicata, major [a] erit quam D. multiplicetur A E quoad fiat major quam D. sitque ipsius multiplex F G ipsa D major. quotuplex autem est F G ipsius A E, totuplex fiat G H ipsius E B, & K ipsius C. sumatur etiam ipsius D dupla quidem L, tripla P, & sic deinceps una amplius, quoad ea quæ sumitur multiplex ipsius D, fiat prima quæ sit major quam K; sit illa N. sitque M multiplex ipsius D proxime minor quam N. quoniam itaque N prima multiplex est ipsius D quæ major est quam K; erit M non major quam K, hoc est K non erit minor quam M. & cum æque multiplex sit F G ipsius A E ac G H ipsius E B. erit F G æque multiplex A E ac F H ipsius A B [b]. æque autem multiplex est F G ipsius A E ac K ipsius C, ergo F H æque multiplex est A B, ac K ipsius C; hoc est F H, K ipsarum A B & C

a 4. Def. hujus.

b 1. hujus.



sunt

ſunt æque multiplices. rurſus quoniam G H æque multiplex eſt ipſius E B ac K ipſius C, eſtque E B æqualis C erit & G H ipſi K æqualis [c]. ſed K non minor eſt quam M. non igitur G H minor erit quam M, ſed eſt F G major quam D, ergo tota F H major erit quam M & D. ſed M & D ſimul ſunt æquales ipſi N, quia M eſt multiplex ipſius D ipſi N proxime minor, quare F H major erit quam N. unde cum F H ſuperat N, K vero ipſam N non ſuperat, & ſunt F H & K æque multiplices ipſarum A B & C, & eſt N ipſius D alia multiplex, ergo [d] A B ac D majorem rationem habebit quam C ad D. Dico præterea & D ad C majorem habere proportionem, quam D ad A B. iiſdem enim conſtructis ſimiliter oſtendemus N ſuperare K, ipſam verò F H non ſuperare. atque eſt N multiplex ipſius D, & F H K aliæ utcunque ipſarum A B C æque multiplices. ergo D ad C majorem proportionem habet [d], quam D ad A B. Inæqualium igitur magnitudinum major ad eandem majorem habet proportionem, quam minor. & eadem ad minorem, majorem propoſtionem habet, quam ad majorem. Quod oſtendere oportebat.

[c] 1. Axiom. hujus.

[d] 7. Defin. hujus.

PROP. IX. THEOR.

Quæ eandem proportionem habent ad eandem, inter ſe ſunt æquales; & ad quas eadem, eandem habet proportionem, ipſæ etiam inter ſe ſunt æquales.

Habeat enim utraque ipſarum A B ad C eandem proportionem. dico A ipſi B æqualem eſſe. nam ſi non eſſet æqualis, non haberet [a] utraque ipſarum A B ad eandem, eandem proportionem. habet autem. æqualis igitur eſt A ipſi B. Habeat rurſus C ad utramque ipſarum A B eandem proportionem. dico A æqualem eſſe ipſi B. niſi enim ita ſit, non [a] habebit C ad utramque A B eandem proportionem. habet autem. ergo A ipſi B neceſſario eſt æqualis. Quæ igitur ad eandem, eandem proportionem habent, æquales inter ſe ſunt: & ad quas eadem, eandem habet proportionem, ipſæ inter ſe ſunt æquales. Quod demonſtrare oportebat.

A

C

B

[a] 8. hujus.

PROP.

PROP. X. THEOR.

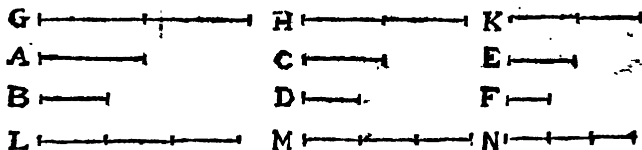
Magnitudinum proportionem habentium ad eandem, quæ majorem proportionem habet, illa major est; ad quam vero eadem majorem habet proportionem, illa minor est.

Habeat enim A ad C majorem proportionem, quam B ad C. dico A quam B majorem esse. si enim non est major, vel æqualis est, vel minor. æqualis autem non est A ipsi B utraque enim ipsarum A B ad C eandem habe-
a 7. hujus. ret a proportionem. atqui eandem non habet. non est igitur A ipsi B æqualis. sed
b 8. hujus. neque minor est quam B, haberet b enim A ad C minorem proportionem, quam B. atqui non habet minorem. non igitur A minor est, quam B. ostensum autem est neque esse æqualem. ergo A quam B major erit. Habeat rursus C ad B majorem proportionem quam C ad A. dico B minorem esse quam A. si enim non est minor, vel æqualis est, vel major. æqualis utique non est B ipsi A, etenim C ad utramque ipsarum A B eandem proportionem a haberet. non habet autem. ergo A ipsi B non est æqualis. sed neque major est B quam A, haberet enim C ad B minorem b proportionem quàm ad A. atqui non habet. non est igitur B major quam A. ostensum autem est neque æqualem esse. ergo B minor erit quam A. Ad eandem igitur proportionem habentium, quæ majorem proportionem habet, illa major est; & ad quam eadem majorem habet proportionem, illa minor est. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XI. THEOR.

Quæ eidem eædem sunt proportiones, & inter se eædem sunt.

Sint enim ut A ad B ita C ad D: ut autem C ad D ita E ad F. dico ut A ad B, ita esse E ad F. sumantur enim ipsa-



rum quidem A C E æque multiplices G H K; ipsarum vero B D F aliæ utcunque æque multiplices L M N. Quoniam igitur

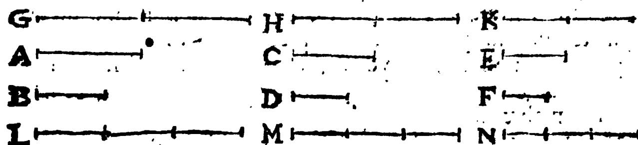
tur est ut A ad B, ita C ad D, & sumptæ sunt ipsarum A C æque multiplices G H, & ipsarum B D aliæ utcunque æque multiplices L M; si [a] G superat L, & H ipsam M superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor minor. rursus quoniam est ut C ad D, ita E ad F, & sumptæ sunt ipsarum C E æque multiplices H K, ipsarum vero D F aliæ utcunque æque multiplices M N; si [a] H superat M, & K ipsam N superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. sed si H superat M, & G superabit L; & si æqualis, æqualis; & si minor minor; quare si G superat L, & K ipsam N superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. & sunt G K quidem ipsarum A E æque multiplices; L N vero ipsarum B F aliæ utcunque æque multiplices. ergo [a] ut A ad B, ita erit E ad F. Quæ igitur eidem eædem sunt proportiones, & inter se eædem sunt. Quod ostendisse oportuit.

[a] 5. Def. hujus.

PROP. XII. THEOR.

Si quotcunque magnitudines proportionales fuerint; ut una antecedentium ad unam consequentium, ita erunt antecedentes omnes ad omnes consequentes.

Sint quotcunque magnitudines proportionales A B C D E F, & ut A ad B, ita sic C ad D, & E ad F. dico ut A ad B, ita esse A C E ad B D F. sumantur enim ipsarum A C E æ-



que multiplices G H K, & ipsarum B D F aliæ utcunque æque multiplices L M N. Quoniam igitur ut A ad B, ita est C ad D, & E ad F, & sumptæ sunt ipsarum quidem A C E æque multiplices G H K, ipsarum vero B D F aliæ utcunque æque multiplices L M N; si [a] G superat L, & H ipsam M superabit, & K ipsam N; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. quare & si G superat L, superabunt & G H K ipsas L M N; & si æqualis, æquales; & si minor, minores. suntque G, & G H K ipsarum A, & A C E æque multiplices, quoniam si fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, æqualium numero, singulæ singularum æque multiplices; quotuplex est una magnitudo unius, totuplices [b] erunt & omnes omnium. Et eadem ratione L & L M N ipsarum B, & B D F sunt æque multiplices. est igitur [a] ut A ad B, ita

[a] 5. Def. hujus.

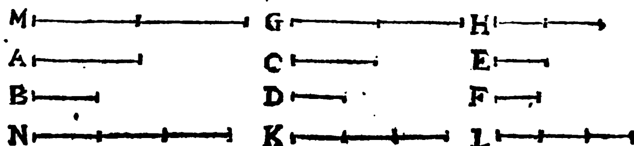
[b] 1. hujus.

A C E ad B D F. Quare si quotcunque magnitudines proportionales fuerint, ut una antecedentium ad unam consequentium, ita erunt antecedentes omnes ad omnes consequentes. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XIII. THEOR.

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam, tertia autem ad quartam majorem proportionem habet quam quinta ad sextam: & prima ad secundam majorem habebit proportionem quam quinta ad sextam.

Prima enim A ad secundam B eandem proportionem habeat quam tertia C ad quartam D, tertia autem C ad quartam D majorem habeat proportionem quam quinta E ad sextam F. dico & primam A ad secundam B majorem proportionem



habere, quam quinta E ad sextam F. Quoniam enim C ad D majorem proportionem habet quam E ad F, sunt quædam ipsarum C E æque multiplices, & ipsarum D F aliæ utcunquæ æque multiplices; & multiplex [a] quidem C superat multiplicem D; multiplex vero E non superat multiplicem F. Sumantur & sint ipsarum C E æque multiplices G H, & ipsarum D F aliæ utcunque æque multiplices K L, ita ut G quidem superet K: H vero ipsam L non superet: & quotuplex est G ipsius C, totuplex sit & M ipsius A; quotuplex autem K ipsius D, totuplex sit & N ipsius B. & quoniam est ut A ad B ita C ad D, & sumptæ sunt ipsarum A C æque multiplices M G, & ipsarum B D aliæ utcunque æque multiplices N K: si [b] M superat N, & G ipsam K superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. sed G superat K. ergo & M ipsam N superabit. H vero non superat L. suntque M H ipsarum A E æque multiplices, & N L ipsarum B F aliæ utcunque æque multiplices. ergo A ad B majorem proportionem habebit [a] quàm E ad F. Si igitur prima ad secundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartam majorem proportionem habeat quam quinta ad sextam: & prima ad secundam majorem habebit proportionem quam quinta ad sextam. Quod ostendere oportebat.

[a] 7. Def. hujus.

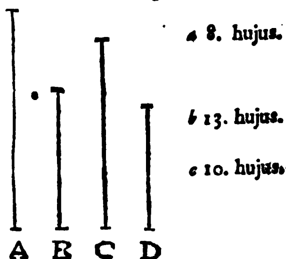
[b] 5. Def. hujus.

PROP.

PROP. XIV. THEOR.

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam; prima autem major sit quam tertia: & secunda quam quarta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor.

Prima enim A ad secundam B eandem proportionem habeat quam tertia C ad quartam D: major autem sit A quàm C. dico & B quam D majorem esse. Quoniam enim A major est quam C, & alia est utcunque magnitudo B, habebit [a] A ad B majorem proportionem quàm C ad B; sed ut A ad B ita C ad D. ergo & C ad D majorem habebit [b] proportionem quàm C ad B: ad quam vero eadem majorem proportionem habet, illa minor [c] est. quare D est minor quàm B, ac propterea B quam D major erit. similiter demonstrabimus & si A æqualis sit ipsi C, & B ipsi D esse æqualem; & si A sit minor quam C, & B quàm D minorem esse. Si igitur prima ad secundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam; prima autem major sit quàm tertia, & secunda quàm quarta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. Quod demonstrare oportebat.



[a] 8. hujus.

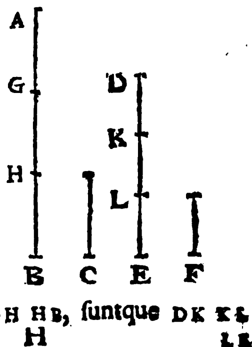
[b] 13. hujus.

[c] 10. hujus.

PROP. XV. THEOR.

Partes inter se comparatæ eandem habent proportionem quàm habent earum æque multiplices.

Sit enim A B æque multiplex C, ac D E ipsius F. dico ut C ad F, ita esse A B ad D E. Quoniam enim æque multiplex est A B ipsius C, ac D E ipsius F; quot magnitudines sunt in A B æquales ipsi C, totidem erunt & in D E æquales F. dividatur A B in magnitudines ipsi C æquales, quæ sint A G G H H B; & D E dividatur in magnitudines æquales F, videlicet in D K K L L E; erit igitur ipsarum A G G H H B multitudo æqualis multitudini D K K L L E. & quoniam æquales sunt A G G H H B, suntque D K K L

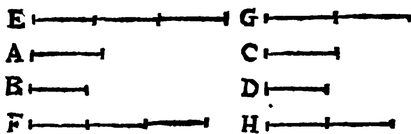


a 7. hujus. L E inter se æquales; ut A G ad D K, ita [a] erit G H ad K L, &
b 12. hujus. H B ad L E. atque erit [b] ut una antecedentium ad unam consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes: est igitur ut A G ad D K, ita A B ad D E. sed A G ipsi C est æqualis, & D K ipsi F. ergo ut C ad F, ita erit A B ad D E. Partes igitur inter se comparatæ eandem habent proportionem quam habent earum æque multiplices. Quod ostendendum fuit.

PROP. XVI. THEOR.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & permutatæ proportionales erunt.

Sint quatuor magnitudines proportionales A B C D, sitque ut A ad B, ita C ad D. dico & permutatas proportionales esse, videlicet ut A ad C, ita esse B ad D. Sumantur enim ipsarum quidem A B æque multiplices E F, ipsarum vero C D aliæ utcunque æque multiplices G H. & quoniam



æque multiplex est E ipsius A, ac F ipsius B: partes autem
a 15. hujus. inter se comparatæ eandem habent [a] proportionem, quam habent earum æque multiplices; erit ut A ad B ita E ad F. ut
b 11. hujus. autem A ad B ita C ad D. ergo & ut C ad D ita [b] E ad F. rursus quoniam G H sunt ipsarum C D æque multiplices, partes autem inter se comparatæ eandem habent proportionem, quam habent earum æque multiplices; erit [a] ut C ad D ita G ad H. sed ut C ad D ita E ad F. ergo [b] & ut E ad F ita G ad H. quod si quatuor magnitudines proportionales
c 14. hujus. sint, prima autem major sit quàm tertia; [c] & secunda quam quarta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. si igitur E superat G, & F ipsam H superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor; suntque E F ipsarum A B æque multiplices, & G H ipsarum C D aliæ utcunque æque mul-
d 5. Def. tiplices, ergo [d] ut A ad C ita erit B ad D. Si igitur quatuor magnitudines proportionales fuerint, & permutatæ proportionales erunt. Quod ostendere oportebat.

PROP.

PROP. XVII. THEOR.

Si compositæ magnitudines sint proportionales, & divisæ proportionales erunt.

Sint compositæ magnitudines proportionales AB BE CD DF. hoc est ut AB ad BE, ita sit CD ad DF. dico etiam divisas proportionales esse, videlicet ut AE ad EB ita esse CF ad FD. sumantur enim ipsarum quidem AE EB CF FD æque multiplices GH HK LM MN, ipsarum vero EB FD aliæ utcunque æque multiplices KX NP. Quoniam æque multiplex est GH ipsius AE, ac HK ipsius EB; erit [a] GH ipsius AE æque multiplex, ac GK ipsius AB. æque autem multiplex est GH ipsius AE, ac LM ipsius CF. ergo GK æque multiplex est AB, ac LM ipsius CF. rursus quoniam æque multiplex est LM ipsius CF, ac MN ipsius FD; erit [a] LM æque multiplex CF, ac LN ipsius CD. sed æque multiplex erat LM ipsius CF, ac GK ipsius AB. æque igitur multiplex est GK ipsius AB, ac LN ipsius CD. quare GK LN ipsarum AB CD æque multiplex erunt. rursus quoniam æque multiplex est HK ipsius EB, ac MN ipsius FD: est autem & KX ipsius EB æque multiplex, ac NP ipsius FD; & composita HX ipsius EB æque multiplex est [b] ac MP ipsius FD. quare cum sit ut AB ad BE, ita CD ad DF; & sumptæ sint ipsarum quidem AB CD æque multiplices GK LN, ipsarum vero EB FD aliæ utcunque æque multiplices HX MP: si [c] GK superat HX, & LN superat MP; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. superet igitur GK ipsam HX, communique ablata HX, & GH ipsam KX superabit. sed si GK superat HX, & LN superat MP: itaque superat LN ipsam MP: communique MN ablata, & LM superabit NP. quare si GH superat KX, & LM ipsam NP superabit. similiter demonstrabimus & si GH sit æqualis KX, & LM ipsi NP esse æqualem; & si minor, minorem. sunt autem GH LM ipsarum AE CF æque multiplices, & ipsarum EB FD aliæ utcunque æque multiplices KX NP. ergo [c] ut AE ad EB ita erit CF ad FD. Si igitur compositæ magnitudines sint proportionales, & divisæ proportionales erunt. Quod demonstrare oportebat.

X K H G B E A D F C P N M L

a 1. hujus.

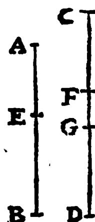
b 2. hujus.

c 5. Def. hujus.

PROP. XVIII. THEOR.

Si divisæ magnitudines sint proportionales, & compositæ proportionales erunt.

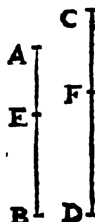
Sint divisæ magnitudines proportionales AE EB CF FD: hoc est ut AE ad EB, ita CF ad FD. dico etiam compositas proportionales esse, videlicet ut AB ad BE, ita esse CD ad DF. Si enim non est ut AB ad BE, ita CD ad DF; erit ut AB ad BE, ita CD vel ad minorem quàm FD, vel ad majorem. sit primo ad minorem, nempe ad DG. & quoniam est ut AB ad BE, ita CD ad DG, compositæ magnitudines sunt proportionales; ergo & divisæ proportionales
a 17. hujus. erunt [a]. est igitur ut AE ad EB, ita CG ad GD. ponitur autem ut AE ad EB, ita CF ad
b 11. hujus. FD. quare & [b] ut CG ad GD, ita CF ad FD. at CG prima major est quam tertia CF. ergo & secunda
c 14. hujus. DG quàm quarta DF major [c] erit. sed & minor, quod fieri non potest. Non igitur est ut AB ad BE, ita CD ad DG. similiter ostendemus neque esse ad majorem quàm DF. ad ipsam igitur DF sit necesse est. Quare si divisæ magnitudines sint proportionales, & compositæ proportionales erunt. Quod oportebat demonstrare.



PROP. XIX. THEOR.

Si fuerit ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam: & reliqua ad reliquam erit ut tota ad totam.

Sit enim ut tota AB ad totam CD, ita ablata AE ad ablatam CF. dico & reliquam EB ad reliquam FD ita esse ut tota AB ad totam CD. Quoniam enim est ut tota AB ad totam CD, ita
a 16. hujus. AE ad CF. & permutando erit [a] ut AB ad AE, ita CD ad CF. quoniam vero compositæ magnitudines sunt proportionales, & divisæ
b 17. hujus. proportionales erunt [b], ut igitur BE ad EA, ita DF ad FC: rursusque permutando ut [a] BE ad DF, ita EA ad FC. sed ut AE ad CF,
c 11. hujus. ita posita est AB ad CD. & reliqua [c] igitur EB erit ad reliquam FD, ut tota AB ad totam CD. Quare si fuerit ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam: & reliqua ad reliquam erit ut tota ad totam. Quod demonstrare oportebat.



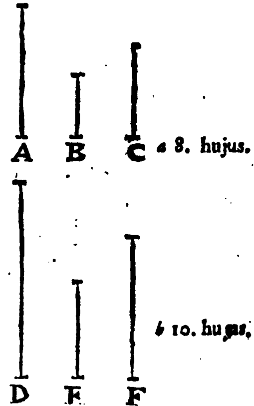
Cor.

Cor. Si quatuor magnitudines proportionales ſint, per converſionem rationis proportionales erunt. Sit enim ut A B ad B E, ita C D ad D F, erit permutando A B ad C D, ita B E ad ablatam D F, erit & reliqua A E ad reliquam C F, ut tota A B ad totam C D. quare rurſus permutando & invertendo erit ut A B ad A E, ita C D ad C F. Quod eſt per converſionem rationis.

PROP. XX. THEOR.

Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur in eadem proportione; ex æquali autem prima major ſit, quam tertia: & quarta quàm ſexta major erit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor.

Sint tres magnitudines A B C, & aliæ ipſis numero æquales D E F binæ ſumptæ ſint in eadem proportione; ſitque ut A ad B, ita D ad E, & ut B ad C, ita E ad F; ex æquali autem major ſit A quam C. dico & D quam F majorem eſſe; & ſi æqualis, æqualem; & ſi minor, minorem. Quoniam enim A major eſt quàm C, alia vero eſt utcunque B, & major ad eandem majorem habet [a] proportionem quàm minor; habebit A ad B majorem proportionem quam C ad B. ſed ut A ad B, ita D ad E; & invertendo ut C ad B, ita F ad E. ergo & D ad E majorem habet proportionem quam F ad E. ad eandem vero proportionem habentium, quæ majorem habet proportionem, illa major [b] eſt. major igitur eſt D quam F. ſimiliter oſtendemus & ſi A ſit æqualis C, & D ipſi F æqualem eſſe; & ſi minor, minorem. Si igitur tres magnitudines fuerint, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur, & in eadem proportione: ex æquali autem prima major ſit quam tertia; & quarta quam ſexta major erit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. Quod oſtendere oportebat.



[a] 8. hujus.

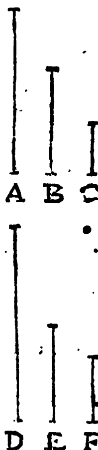
[b] 10. hujus.

PROP. XXI. THEOR.

Si sint tres magnitudinet, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur & in eadem proportione; sit autem perturbata earum analogia, & ex æquali prima major sit quam tertia: & quarta quam sexta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor.

Sint tres magnitudines A B C, & aliæ ipsis numero æquales D E F, binæ sumptæ & in eadem proportione. sit autem perturbata earum analogia, videlicet ut A quidem ad B, ita E ad F; ut vero B ad C, ita D ad E; & ex æquali A major sit quam C. dico & D quam F majorem esse; & si æqualis, æqualem; & si minor, minorem. Quoniam enim major est A quam C, alia vero est B; habebit; [a] A ad B majorem proportionem quam C ad B. sed ut A ad B, ita E ad F: & invertendo ut C ad B, ita E ad D. quare & E ad F majorem habebit proportionem quam E ad D. ad quam vero eadem majorem proportionem habet illa minor est [b]. minor igitur est F quam D; ac propterea D quam F major erit. similiter ostendemus & si A sit æqualis C, & D ipsi F esse æqualem; & si minor, minorem. Si igitur sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ sumantur & in eadem proportione, sit autem perturbata earum analogia, & ex æquali autem prima major sit quam tertia: & quarta quam sexta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. Quod demonstrare oportebat.

a 8. hujus.
b 10. hujus.

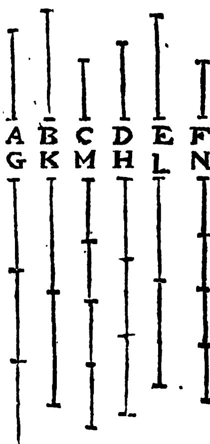


PROP. XXII. THEOR.

Si sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem proportione: & ex æquali in eadem proportione erunt.

Sint quotcunque magnitudines A B C, & aliæ ipsis numero æquales D E F, binæ sumptæ in eadem proportione, hoc est ut A quidem ad B, ita D ad E, ut autem B ad C, ita E ad F. dico & ex æquali in eadem proportione esse, ut A ad C, ita D ad F. sumantur enim ipsarum quidem A D æque multiplices G H; ipsarum vero B E aliæ utcunque æque multiplices

plices K L, & ipsarum C F aliæ utcunque æque multiplices M N. Quoniam igitur est ut A ad B, ita D ad E, & sumptæ sunt ipsarum A D æque multiplices G H, & ipsarum B E aliæ utcunque æque multiplices K L; erit ut [a] G ad K, ita H ad L. eadem quoque ratione erit ut K ad M, ita L ad N. & cum sint tres magnitudines G K M, & aliæ ipsis numero æquales H L N, binæ sumptæ & in eadem proportione; ex æquali [b] si G superat M, & H ipsam N superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. suntque G H ipsarum A D æque multiplices, & M N ipsarum C F aliæ utcunque æque multiplices. ut igitur A ad C, ita erit [c] D ad F. Quare si sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem proportione: & ex æquali in eadem proportione erunt. Quod demonstrare oportebat.



[a] 4. hujus.

[b] 20. hujus.

[c] 5. Defin. hujus.

PROP. XXIII. THEOR.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem proportione; sit autem perturbata earum analogia: & ex æquali in eadem proportione erunt.



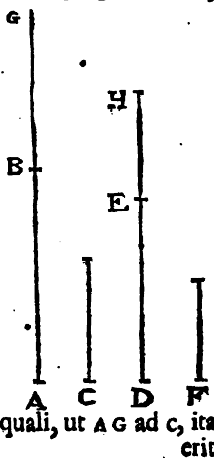
Sint tres magnitudines A B C, & aliæ ipsis numero æquales, binæ sumptæ in eadem proportione, D E F, sit autem perturbata earum analogia, hoc est sit ut A ad B, ita E ad F, & ut B ad C, ita D ad E. dico ut A ad C, ita esse D ad F. Sumantur ipsarum quidem A B D æque multiplices G H L: ipsarum vero C E F aliæ utcunque æque multiplices K M N. & quoniam G H æque multiplices sunt ipsarum A B, partes autem eandem habent proportionem quam habent æque ipsa-

a 15. hujus. ipsarum multiplices: erit a ut A ad B, ita G ad H. & simili ratione ut E ad F, ita M ad N. atque est ut A ad B, ita E ad
b 11. hujus. F: ut b igitur G ad H, ita M ad N. rursus quoniam est ut B ad C ita D ad E, & sumptae sunt ipsarum B D aeque multiplices H L, ipsarum vero C E aliae utcunque aeque multiplices K M: erit ut H ad K, ita L ad M. ostensum autem est & ut G ad H, ita esse M ad N. quoniam igitur tres magnitudines proportionales sunt G H K, & aliae ipsis numero aequales L M N, binae sumptae in eadem proportione, estque ipsarum perturbata
c 21. hujus. analogia; ex aequali, si c G superat K, & L ipsam N superabit; & si aequalis, aequalis; & si minor, minor. sunt autem G L ipsarum A D aeque multiplices: & K N aeque multipli-
d 5. Def. quinti. ces ipsarum C F. ut igitur d A ad C, ita erit D ad F. Quare si fuerint tres magnitudines, & aliae ipsis numero aequales, quae binae sumantur in eadem proportione, sit autem perturbata earum analogia: & ex aequali in eadem proportione erunt. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXVI. THEOR.

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; habeat autem & quinta ad secundam proportionem eandem, quam sexta ad quartam: & composita prima cum quinta ad secundam eandem proportionem habebit, quam tertia cum sexta ad quartam.

Prima A B ad secundam C eandem habeat proportionem, quam tertia D E ad quartam F. habeat autem & quinta B G ad secundam C proportionem eandem quam sexta E H ad quartam F, dico & compositam primam cum quinta A G ad secundam C eandem proportionem habere, qnam tertiam cum sexta D H ad quartam F. Quoniam enim est ut B G ad C, ita E H ad F; erit invertendo ut C ad B G, ita F ad E H. & quoniam ut A B ad C, ita est D E ad F: ut autem C ad B G, ita
a 22. hujus. F ad E H; erit a ex aequali ut A B ad B G, ita D E ad E H. quod cum divisae magnitudines sint proportionales, & com-
b 18. hujus. positae proportionales b erunt. ut igitur A G ad G B, ita est D H ad H E. sed &
c hypoth. ut c G B ad C, ita H E ad F. ergo, ex a aequali, ut A G ad C, ita erit

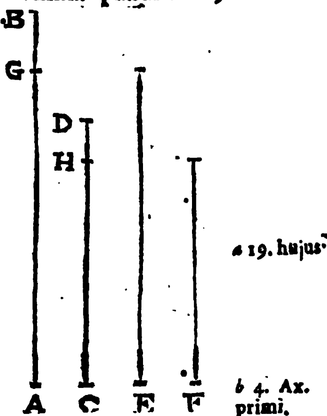


erit D H ad F. Si igitur prima ad ſecundam eandem habeat proportionem quàm tertia ad quartam: habeat autem & quinta ad ſecundam proportionem eandem quam ſexta ad quartam: & compoſita prima cum quinta ad ſecundam eandem proportionem habebit quam tertia cum ſexta ad quartam. Quod oſtendere oportebat.

PROP. XXV. THEOR.

Si quatuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipſarum & minima, duabus reliquis majores erunt.

Sint quatuor magnitudines proportionales A B, C D, E, F; & ſit ut A B ad C D, ita E ad F. ſit autem maxima ipſarum A B, & F minima. dico A B & F ipſis C D E majores eſſe. ponatur enim ipſi quidem E æqualis A G, ipſi vero F æqualis C H. Quoniam igitur eſt ut A B ad C D, ita E ad F: eſtque A G æqualis E, & C H æqualis F; erit ut A B ad D C, ita A G ad C H. & quoniam eſt ut tota A B ad totam C D, ita ablata A G ad ablatam erit C H; & reliqua G B ad reliquam H D [a] ut tota A B ad C D totam. major autem eſt A B quam C D. ergo & G B quam H D major erit. quod cum A G ſit æqualis ipſi E, & C H ipſi F; erunt A G & F ipſi C H & E æquales. [b] ſi autem inæqualibus æqualia addantur, tota inæqualia erunt. ergo G B H D inæqualibus exiſtentibus, quippe cum G B ſit major, ſi ipſi quidem G B addantur A G & F, ipſi vero H D addantur C H & E: fient A B ad F, ipſis C D ad E neceſſario majores. Si igitur quatuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipſarum & minima, duabus reliquis majores erunt. Quod demonſtrare oportebat.



[a] 19. hujus.

[b] 4. Ax. primi.

EUCLIDIS

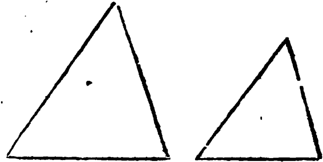
EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER SEXTUS.

DEFINITIONES.

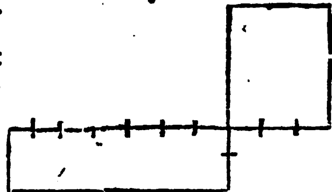
I.

Similes figuræ rectilineæ sunt quæ & singulos angulos æquales habent, & circa æquales angulos latera proportionalia.



II.

Reciprocæ figuræ sunt quando in utraque figura antecedentes,& consequentes rationum fuerint termini.

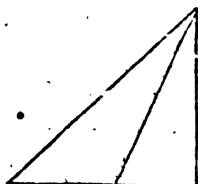


III.

Extrema ac media ratione secari recta linea dicitur, quando sit ut tota ad majus segmentum, ita majus segmentum ad minus.

IV.

Altitudo cujusque figuræ est linea perpendicularis, quæ à vertice ad basim ducitur.



V.

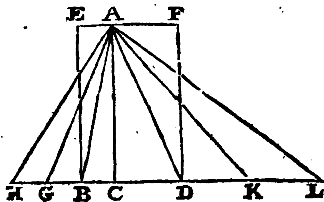
Ratio ex rationibus componi dicitur, quando rationum quantitates inter se multiplicatæ, aliquam efficiunt rationem.

PROPOSITIO I.

THEOREMA.

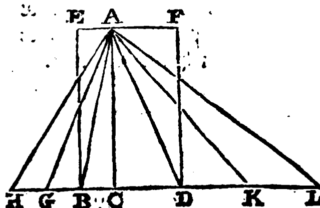
Triangula, & parallelogramma quæ eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases.

Sint triangula quidem ABC ACD, parallelogramma vero EC CF, quæ eandem habent altitudinem, videlicet perpendicularem à puncto A ad BD ductam. dico ut basis BC ad CD basim, ita esse triangulum ABC ad triangulum ACD, & parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. producatur BD ex utraque parte ad puncta HL, & ipsi quidem BC basi æquales quotcunque ponantur BG GH, ipsi vero basi CD ponantur quotcunque æquales DK KL, & AG AH AK AL jungantur. Quoniam igitur CB BG GH inter se æquales sunt, erunt & triangula AHG AGB ABC inter [a] se æqualia. ergo quotuplex est basis HC ipsius BC basis, totuplex est AHC triangulum trianguli ABC. eadem ratione quotuplex est LC basis ipsius basis CD, totuplex est & triangulum ALC ipsius ACD trianguli: & si æqualis est HC basis basi CL, & triangulum AHC triangulo ALC est [a] æquale: & si basis HC basim CL superat, & triangulum AHC superabit triangulum ALC: & si minor, minus. quatuor igitur magnitudinibus existentibus, videlicet duabus basibus BC CD, & duobus triangulis ABC ACD, sumpta sunt æque multiplicia basis quidem BC, & ABC trianguli, vide-



[a] 38.primi.

videlicet basis HC, & AHC triangulum: basis vero CD, & trianguli ACD, alia utcunque æque multiplicia, nempe CL basis, & ALC triangulum; atque ostensum est si HC basis basim CL superat, & triangulum AHC superare triangulum ALC; & si æqualis, æquale; & si minor, minus. est igitur [b] ut BC basis ad basim CD, ita triangulum ABC ad ACD triangulum. Et quoniam trianguli ABC duplum est [c] parallelogrammum EC, & trianguli ACD parallelogrammum FC duplum [c], partes [d] autem cum pariter multiplicibus eandem inter se proportionem habent: igitur ut ABC triangulum ad triangulum ACD, ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. quoniam igitur ostensum est ut basis BC ad CD basim, ita esse ABC triangulum ad triangulum ACD; ut autem ABC triangulum ad triangulum ACD, ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum; erit [e] ut BC basis ad basim CD, ita parallelogrammum EC ad FC parallelogrammum. Quare triangula & parallelogramma quæ eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases. Quod demonstrare oportebat.



b Def. 5. quinti.
c 41. primi.
d 15. quinti.
e 11. quinti.

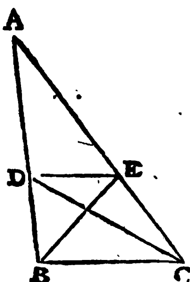
PROP. II. THEOR.

Si uni laterum trianguli parallela quædam recta linea ducta fuerit, proportionaliter secabit ipsius trianguli latera, & si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ sectiones conjungit recta linea, reliquo trianguli lateri parallela erit.

Trianguli enim ABC uni laterum BC, parallela ducatur DE. dico ut BD ad DA, ita esse CE ad EA. jungantur BE CD. triangulum igitur BDE triangulo CDE est [a] æquale, in eadem enim sunt basi DE, & in eisdem DE & BC parallelis; aliud autem triangulum est ADE: sed æqualia ad idem eandem habent [b] proportionem; ergo ut triangulum BDE ad triangulum ADE, ita est CDE triangulum ad triangulum ADE. ut autem triangulum BDE ad triangulum ADE, ita [c] est BD ad DA; nam cum eandem altitudinem habent, videlicet perpendicularem à puncto E ad AB ductam, inter se sunt ut bases. & ob eandem causam ut CDE triangulum ad triangulum ADE, ita CE ad EA. & igitur ut BD ad DA, ita est [d] CE ad EA. Et si trianguli ABC latera AB AC pro-

a 37. primi.
b 7. quinti.
c 1. hujus.
d 11. quinti.

proportionaliter secta sunt, *i.e.* ut BD ad DA, ita sit CE ad EA; jungatur DE. dico DE ipsi BC parallelam esse. iisdem constructis, quoniam est ut BD ad DA, ita CE ad EA; ut autem BD ad DA, ita [c] est BDE triangulum ad triangulum ACE; & ut CE ad EA, ita CDE triangulum [c] ad triangulum ADE, erit ut triangulum BDE ad triangulum ADE, ita [e] CDE triangulum ad triangulum ADE. quod cum utrumque triangulorum BDE CDE ad triangulum ADE eandem habeat proportionem; erit BDE triangulum [f] triangulo CDE æquale; & sunt in eadem basi DE. æqualia autem triangula, & in eadem basi constituta, etiam in eisdem [g] sunt parallelis. ergo DE ipsi BC parallela est. Si igitur uni laterum trianguli parallela quædam recta linea ducta fuerit, proportionaliter secabit ipsius trianguli latera. & si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ sectiones conjungit recta linea reliquo trianguli lateri parallela erit. Quod oportebat demonstrare.

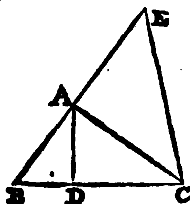


[e] 11. quinti.
[f] 9. quinti.
[g] 39. primi.

PROP. III. THEOR.

Si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta linea secet etiam basim; basis partes eandem proportionem habebunt, quam reliqua trianguli latera. & si basis partes eandem proportionem habeant, quam reliqua trianguli latera; quæ à vertice ad sectionem ducitur recta linea, trianguli angulum bifariam secabit.

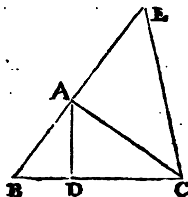
Sit triangulum ABC, & secetur angulus BAC bifariam [a] recta linea AD. dico ut BD ad DC, ita esse BA ad AC. ducatur per C ipsi DA parallela [b] CE, & producta BA conveniat cum ipsa in E puncto. Quoniam igitur in parallelas AD EC incidit recta linea quædam AC, erit [c] ACE angulus angulo CAD æqualis. sed CAD angulus ponitur æqualis angulo BAD. ergo & BAD ipsi ACE angulo æqualis erit. rursus quoniam in parallelas AD EC recta



[a] 9. primi.
[b] 31. primi.
[c] 29. primi.

linea

linea BAE incidit, exterior angulus BAD æqualis est c interiori AEC. ostensus autem est & angulus ACE angulo BAD æqualis. ergo & ACE ipsi AEC æqualis erit: ac propterea
d 6. primi. latus AE æquale d lateri AC. & quoniam uni laterum trianguli BCE, videlicet ipsi EC
e 2. hujus. parallela ducta est AD; erit e ut BD ad DC, ita BA ad AE; æqualis autem est AE ipsi AC.
f 7. quinti. est igitur f ut BD ad DC, ita BA ad AC. Et si sit ut BD ad DC, ita BA ad AC, & AD jungatur. dico angulum BAC



bifariam sectum esse recta linea AD. iisdem enim constructis, quoniam est ut BD ad DC, ita BA ad AC; sed & ut
g 2. hujus. BD ad DC, ita g BA ad AE, etenim uni laterum trianguli
h 11. quinti. BCE, videlicet ipsi EC parallela ducta est AD, erit h & ut
i 9. quinti. BA ad AC, ita BA ad AE. ergo AC est i æqualis AE, ac
k 5. primi. propterea & angulus AEC angulo ACE k æqualis. sed angulus quidem AEC est æqualis angulo exteriori BAD; an-
l 29. primi. gulus vero ACE æqualis l alterno CAD. quare & BAD angulus ipsi CAD æqualis erit. angulus igitur BAC bifariam sectus est recta linea AD. Ergo si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta linea etiam basim secet; basis partes eandem proportionem habebunt, quam reliqua trianguli latera. & si basis partes eandem proportionem habent, quam reliqua trianguli latera; quæ à vertice ad sectionem ducitur recta linea, trianguli angulum bifariam secabit. Quod oportebat demonstrare.

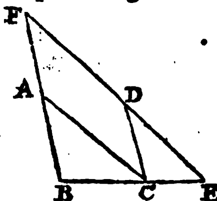
PROP. IV. THEOR.

Æquiangulorum triangulorum latera quæ circum æquales angulos sunt, proportionalia sunt. & homologa, sive ejusdem rationis sunt latera quæ æqualibus angulis subtenduntur.

Sint æquiangula triangula ABC DCE, quæ angulum quidem ABC angulo DCE, angulum vero ACB angulo DEC æqualem habeant, & præterea angulum BAC angulo CDE. dico triangulorum ABC DCE proportionalia esse latera quæ sunt circa æquales angulos; & homologa, sive ejusdem rationis latera esse quæ æqualibus angulis subtenduntur. ponatur BC in directum ipsi CE. Et quoniam
a 17. primi. anguli ABC ACB duobus rectis minores a sunt, æqualis autem est angulus ACB angulo DEC; erunt ABC DEC an-

guli

guli duobus rectis minores. quare BA ED productæ inter se conveniant [b]; producantur, & conveniant in puncto F. & quoniam angulus DCE est æqualis angulo ABC; erit [c] BF ipsi DC parallela. rursus quoniam æqualis est angulus ACB angulo DEC, parallela [c] erit AC ipsi FE. parallelogrammum igitur est FACD; ac propterea FA quidem ipsi CD, AC vero ipsi FD est [d] æqualis. & quoniam uni laterum trianguli FBE, videlicet ipsi FE, parallela ducta est AC; erit [e] ut BA ad AF, ita BC ad CE. æqualis autem est AF ipsi CD. ut igitur BA ad CD. ita BC ad CE, & permutando ut BA ad BC ita CD ad CE. rursus quoniam CD parallela est BF, erit [e] ut BC ad CE, ita FD ad DE. sed FD est æqualis AC. ergo ut [f] BC ad CE, ita AC ad DE. permutando igitur, ut BC ad CA ita CE ad ED. itaque quoniam ostensum est, ut AB ad BC ita DC ad CE, ut autem BC ad CA ita CE ad ED: erit [g] ex æquali; ut BA ad AC ita CD ad DE. Æquianglorum igitur triangulorum proportionalia sunt latera quæ circum æquales angulos. & homologa, sive ejusdem rationis, latera sunt quæ æqualibus angulis subtenduntur. Quod demonstrare oportebat.

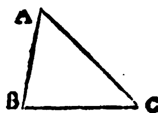


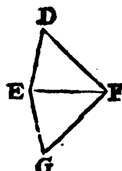
[b] 12. axio. primi.
[c] 28. primi.
[d] 34. primi.
[e] 2. hujus.
[f] 7. quinti.
[g] 22. quinti.

PROP. V. THEOR.

Si duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos quibus homologa latera subtenduntur.

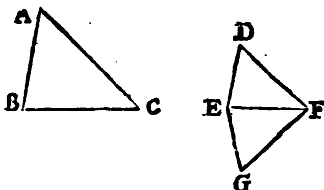
Sint duo triangula ABC DEF, quæ latera proportionalia habeant, hoc est, sit ut AB quidem ad BC, ita DE ad EF: ut autem BC ad CA, ita EF ad FD: & adhuc ut BA ad AC, ita ED ad DF. dico triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum esse, & æquales habere angulos quibus homologa latera subtenduntur, angulum quidem ABC angulo DEF, angulum vero BCA angulo EFD, & præterea angulum BAC angulo EDF. Constituatur enim [a] ad rectam lineam EF, & ad puncta in ipsa EF, angulo quidem ABC æqualis angulus FEG; angulo autem BCA angulus





[a] 23. primi.

b 2. Cor.32. primi. gulus EFG: quare reliquus BAC angulus b reliquo EGF est æqualis. ideoque æquiangulum est triangulum ABC triangulo EGF. triangulorum igitur ABC EGF proportionalia sunt latera quæ æqualibus angulis subtendunt. ergo ut AB
c 4. hujus. ad BC c, ita GE ad EF. sed ut AB ad BC, ita DE ad EF. ut
d 11. quinti. igitur DE ad EF, ita d GE ad EF. quod cum utraque ipsarum DE EG ad EF eandem
e 9. quinti. proportionem habeat, erit e DE ipsi EG æqualis. Eadem ratione & DF æqualis FG. itaque quoniam DE est æqualis EG, communis autem EF; duæ DE EF duabus GE EF æquales sunt, ut basis DF basi FG
f 8. primi. æqualis. angulus igitur DEF est æqualis f angulo GEF, & DEF triangulum æquale triangulo GEF, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera subtenduntur. ergo angulus quidem DEF est æqualis angulo GEF, angulus vero EDF æqualis angulo EGF; & quoniam angulus DEF est æqualis angulo GEF, & angulus GEF angulo ABC, erit & angulus ABC angulo FED æqualis. eadem ratione & angulus ACB æqualis est angulo DFE, & adhuc angulus ad A angulo ad D. ergo ABC triangulum triangulo DEF æquiangulum erit. Si igitur duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula erunt triangula; & æquales habebunt angulos quibus homologa latera subtenduntur. Quod oportebat demonstrare.

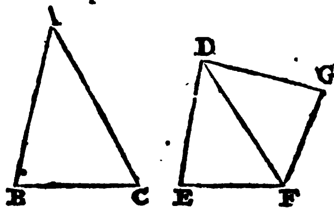


PROP. VI. THEOR.

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos quibus homologa latera subtenduntur.

Sint duo triangula ABC DEF, unum angulum BAC uni angulo EDF æqualem habentia, circa æquales autem angulos latera proportionalia, hoc est, sit ut BA ad AC, ita ED ad DF. dico triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum esse, & angulum quidem ABC habere æqualem angulo DEF; angulum vero ACB angulo DEF.
a 23. primi. Constituatur a enim ad rectam lineam DF, & ad puncta in ipsa DF, alterutri angulorum BAC EDF æqualis angulus FDG, angulo autem ACB æqualis DFG. reliquus igitur

igitur ad B reliquo ad G est *b* æqualis. ergo triangu- *b* 2. Cor. 32.
lum ABC triangulo DGF æquiangulum est; ac propterea primi.
ut BA ad AC ita *c* est GD ad DF: ponitur autem & ut BA *c* 4. hujus.
ad AC, ita ED ad DF. ut
igitur *d* ED ad DF, ita GD *d* 11. quinti.
ad DF. quare ED æqualis
est *e* ipsi DG, & communis *e* 9. quinti.
DF. ergo duæ ED DF duabus GD DF æquales sunt
& angulus EDF angulo
GDF est æqualis; basis igitur



EF est *f* æqualis basi FC, triangulumque DEF æquale trian- *f* 4. primi.
gulo GDF, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. ergo angulus quidem DFG est æqualis angulo DFE; angulus vero ad G angulo ad E. sed angulus DFG æqualis est angulo ACB: & angulus igitur ACB angulo DFE est æqualis. ponitur autem & BAC angulus æqualis angulo EDF, ergo & reliquus qui ad B æqualis *b* est reliquo ad E. æquiangulum igitur est triangulum ABC triangulo DEF. Quare si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos quibus homologa latera subtenduntur. Quod ostendere oportebat.

PROP. VII. THEOR.

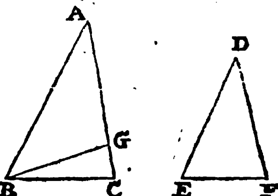
Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, & reliquorum utrumque simul, vel minorem, vel non minorem recto: æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos circa quos latera sunt proportionalia.

Sint duo triangula ABC DEF, unum angulum uni angulo æqualem habentia, videlicet angulum BAC angulo EDF æqualem, circa alios autem angulos ABC DEF latera proportionalia, ut sit DE ad EF, sicut AB ad BC: & reliquorum qui ad C F utrumque simul minorem vel non minorem recto. dico triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum esse; angulumque ABC æqualem angulo DEF, & reliquum videlicet qui ad C reliquo qui ad F æqualem. Si inæqualis est angulus ABC angulo DEF, unus ipsorum major erit; sit major ABC: & constituatur *a* ad rectam lineam AB, & ad *a* 23. primi.
punctum in ipsa B, angulo DEF æqualis angulus ABG. &

 quo-

quoniam angulus quidem A est æqualis angulo D, angulus vero ABG angulo DEF: erit reliquus AGB reliquo DFE æqualis [b]. æquiangulum igitur est ABC triangulum triangulo DEF. quare ut [c] AB ad BG, sic DE ad EF: utque DE ad EF, sic ponitur AB ad BC. ut igitur AB ad BC, sic AB ad BG. quod cum AB ad utrumque BC BG eandem habeat proportionem, erit BC ipsi BG æqualis [d]: ac propterea angulus ad C est æqualis [e] angulo BGC. quare uterque angulorum BCG BGC minor est recto, igitur qui ei deinceps est AGB major est recto. atque ostensus est angulus AGB æqualis angulo qui ad F. angulus igitur qui ad F recto major est. atqui ponitur non major: cum C non est major recto, quod est absurdum. non igitur inæqualis est angulus ABC angulo DEF. ergo ipsi est æqualis. est autem & angulus ad A æqualis ei qui ad D. quare & reliquus qui ad C æqualis [b] reliquo qui ad F. æquiangulum igitur est ABC triangulum triangulo DEF. Si igitur duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, & reliquorum utrumque simul, vel minorem, vel non minorem recto: æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos circa quos proportionalia sunt latera. Quod oportebat demonstrare.

[b] 2. Cor. 32. primi.
[c] 4. hujus.
[d] 9. quinti.
[e] 5. primi.

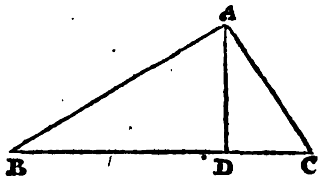


PROP. VIII. THEOR.

Si in triangulo rectangulo, ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur; quæ ad perpendicularem sunt triangula, & toti, & inter se similia sunt.

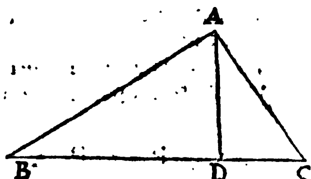
Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens angulum BAC: & à puncto A ad BC perpendicularis ducatur AD. dico triangula ABD ADC toti triangulo ABC, & inter se similia esse. Quoniam enim angulus BAC est æqualis angulo ADB, rectus enim uterque est, & angulus ad B communis duobus triangulis ABC ABD; erit [a] reliquus ACB reliquo BAD æqualis. æquiangulum igitur est triangulum ABC triangulo ABD. quare [b] ut BC quæ subtendit angulum rectum trianguli ABC, ad BA subtendentem

[a] 2. Cor. 32. primi.
[b] 4. hujus.



tem

tem angulum rectum trianguli ABD, sic ipsa AB subtendens angulum ad C trianguli ABC, ad DB subtendentem angulum æqualem angulo ad C, videlicet BAD ipsius ABD trianguli; & adhuc AC ad AD subtendentem angulum ad B communem duobus triangulis. ergo triangulum ABC triangulo ABD æquiangulum est; & circa æquales angulos latera habet proportionalia. simile igitur c est triangulum ABC triangulo ABD. eadem ratione demonstrabimus etiam ADC triangulum triangulo ABC simile esse. quare utrumque ipsorum ABD ADC toti ABC triangulo est simile. Dico insuper triangula ABD ADC etiam inter se similia esse. Quoniam enim angulus BDA rectus est æqualis recto ADC; sed & BAD ostensus est æqualis angulo ad C; erit reliquus ad B reliquo DAC æqualis a. æquiangulum igitur est triangulum ABD triangulo ADC. ergo b ut BD trianguli ABD subtendens BAD angulum, ad DA trianguli ADC subtendentem angulum qui est ad C, æqualem angulo BAD, sic ipsa AD trianguli ABD subtendens angulum ad B, ad DC subtendentem angulum DAC ei qui est ad B æqualem; & adhuc BA ad AC subtendentem angulum rectum ADC. simile igitur est ABD triangulum triangulo ADC. Quare si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur; quæ ad perpendicularem sunt triangula, & toti, & inter se similia sunt. Quod oportebat demonstrare.



c 1. Def. hujus.

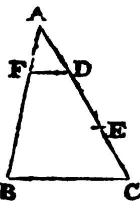
Cor. Ex hoc manifestum est, in triangulo rectangulo, ab angulo recto ad basim perpendicularem ductam, mediam proportionalem esse inter segmenta basis: & præterea inter basim & basis segmentum utrumlibet, latus segmento conterminum medium esse proportionale.

PROP. IX. PROBL.

A data recta linea imperatam partem abscindere.

Sit data recta linea AB. oportet ab ipsa AB imperatam partem abscindere. Imperetur pars tertia; & ducatur à puncto A quædam recta linea AC, quæ cum ipsa AB angulum quemlibet contineat; sumaturque in AC quodvis punctum D, & ipsi AD æquales a ponantur DE EC, deinde junga- a 3. primi

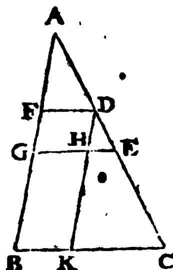
b 31. primi. jungatur BC; per D ipsi BC parallela b ducatur DF. Itaque quoniam uni laterum trianguli ABC, videlicet ipsi BC,
c 2. hujus. parallela ducta est FD; erit c ut CD ad DA, ita BF ad FA; dupla autem est CD ipsius DA. ergo & BF ipsius FA dupla erit. tripla igitur est BA ipsius AF. quare à data recta linea AB imperata tertia pars AF abscissa est. Quod facere oportebat.



PROP. X. PROBL.

Datam rectam lineam insectam, datæ rectæ lineæ sectæ similiter secare.

Sit data quidem recta linea insecta AB, secta vero AC oportet rectam lineam AB insectam ipsi AC sectæ similiter secare. sit secta AC in punctis D & E, & ponantur ita, ut angulum quemvis contineant, junctaque BC per puncta qui-
a 31. primi. dem D & E ipsi BC parallelæ a ducantur DF EG: per D vero ipsi AB ducatur parallela DHK. parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum FH HB: ac pro-
b 34. primi. pterea DH quidem est b æqualis FG, HK vero ipsi GB. & quoniam uni laterum trianguli DKC, ipsi scilicet KC, parallela
c 2. hujus. ducta est HE; erit c ut CE ad ED, ita KH ad HD. æqualis autem est KH quidem ipsi BG, HD vero ipsi GF. est igitur ut CE ad ED, ita BG ad GF. rursus quoniam uni laterum trianguli AGE, nimirum ipsi EG, parallela ducta est FD, ut ED ad DA, ita c erit GF ad FA. sed ostensum est ut CE ad ED, ita esse BG ad GF. ut igitur CE ad ED, ita est BG ad GF, & ut ED ad DA, ita GF ad FA. ergo data recta linea insecta AB, datæ rectæ lineæ sectæ AC similiter secta est. Quod facere oportebat.

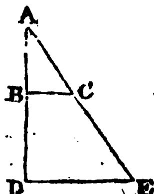


PROP. XI. PROBL.

Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem invenire.

Sint datæ duæ rectæ lineæ AB AC, & ponantur ita ut angulum quemvis contineant. oportet ipsis AB AC tertiam

tertiam proportionalem invenire. Producantur A B A C ad puncta D E: ponaturque ipsi A C æqualis B D; & juncta B C, ducatur [a] per D ipsi B C parallela D E. quoniam igitur uni laterum trianguli A D E, videlicet ipsi D E parallela ducta est B C, erit [b] ut A B ad B D, ita A C ad C E. æqualis autem est B D ipsi A C, ut igitur A B ad A C, ita est A C ad C E. quare datis rectis lineis A B A C tertia proportionalis inventa est C E. Quod facere oportebat.



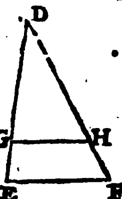
[a] 31. primi.

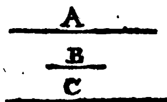
[b] 2. hujus.

PROP. XII. PROBL.

Tribus datis rectis lineis quartam proportionalem invenire.

Sint datæ tres rectæ lineæ A B C. oportet ipsis A B C quartam proportionalem invenire. Exponantur duæ rectæ lineæ D E D F angulum quemvis E D F continentes: & ponatur ipsi quidem A æqualis D G, ipsi vero B æqualis G E, & ipsi C æqualis D H: junctaque G H, per E ipsi parallela [a] ducatur E F. itaque quoniam uni laterum trianguli D E F, nimirum ipsi E F, parallela ducta est G H, erit ut D G ad G E ita [b] D H ad H F. est autem D G ipsi A æqualis; G E vero æqualis B, & D H æqualis C, ut igitur A ad B, ita C ad H F. quare datis tribus rectis lineis A B C quarta proportionalis inventa est H F. Quod facere oportebat.





[a] 31. primi.

[b] 2. hujus.

PROP. XIII. PROBL.

Duabus datis rectis lineis mediam proportionalem invenire.

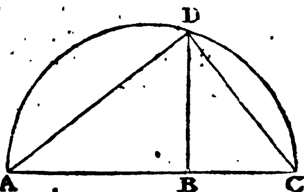
Sint datæ duæ rectæ lineæ A B B C. oportet inter ipsas A B B C mediam proportionalem invenire. Ponantur in directum, & super ipsa A C describatur semicirculus A D C, ducaturque [a] à puncto B ipsi A C ad rectos angulos B D, & A D D C jungantur. Quoniam igitur angulus A D C est in semicirculo, is rectus [b] est. & quoniam in triangulo rectangulo

[a] 11. primi.

[b] 31. tertii.

gulo ADC, ab angulo recto ad basim perpendicularis ducta est DB, erit DB media proportionalis [c] inter segmenta basis AB BC. duabus igitur datis rectis lineis AB BC media proportionalis inventa est. Quod facere oportebat.

[c] Cor. 8. hujus.

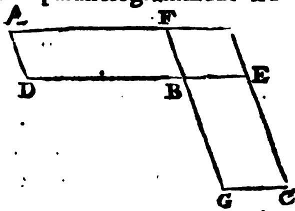


PROP. XIV. THEOR.

Æqualium, & unum uni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum latera quæ sunt circum æquales angulos, reciproca sunt: Et quorum parallelogrammorum unum uni æqualem habentium angulum, latera quæ circum æquales angulos, sunt reciproca; ea inter se sunt æqualia.

Sint æqualia parallelogramma AB BC, æquales habentia angulos ad B, & ponantur in directum DB BE. ergo & in directum [a] erunt FB BC. dico parallelogrammorum AB BC latera quæ sunt circum æquales angulos reciproca esse: hoc est ut DB ad BE ita esse GB ad BF. Compleatur enim parallelogrammum FE. & quoniam parallelogrammum AB æquale est parallelogrammo BC, aliud autem aliquod est FE parallelogrammum, erit ut AB ad FE [b], ita BC ad FE. sed ut AB quidem ad FE, ita [c] est DE ad BE; ut autem BC ad FE, ita [c] GB ad BF; ut igitur [d] DB ad BE, ita GB ad BF. ergo parallelogrammorum AB BC latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent. Et si reciproca sunt, seu ex contraria parte sibi ipsis respondeant latera quæ sunt circum æquales angulos, sit nempe ut DB ad BE, ita GB ad BF. dico parallelogrammum AB parallelogrammo BC æquale esse. quoniam enim est ut DB ad BE, ita GB ad BF, ut autem DB ad BE, ita [c] AB parallelogrammum ad parallelogrammum FE, & ut GB ad BF, ita [c] BC parallelogrammum ad parallelogrammum FE; erit [d] & ut AB ad FE, ita BC ad FE. æquale igitur est AB [e] parallelogrammum parallelogrammo BC. Ergo æqualium & unum uni

[a] 14. primi.
[b] 7. quinti.
[c] 1. hujus.
[d] 11. hujus.
[e] 9. quinti.

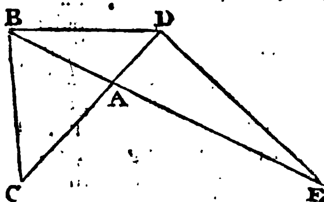


uni æqualem habentium angulum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt, seu ex contraria parte sibi ipsis respondent: & quorum parallelogrammorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt, ea inter se sunt æqualia. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XV. THEOR.

Æqualium, & unum uni æqualem habentium angulum triangulorum latera, quæ circum æquales angulos, sunt reciproca: Et quorum triangulorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos reciproca sunt, ea inter se sunt æqualia.

Sint æqualia triangula ABC ADE unum angulum uni angulo æqualem habentia, angulum scilicet BAC angulo DAE. dico triangulorum ABC ADE latera quæ circum æquales angulos reciproca esse, hoc est ut CA ad AD, ita esse EA ad AB. ponantur enim ita ut in directum sit CA ipsi AD. ergo & EA ipsi AB in directum [a] erit; & [a] 14. primi.
jungatur BD. quoniam igitur triangulum ABC æquale est triangulo ADE, aliud autem est ABD; erit ut CAB triangulum ad triangulum BAD, ita [b] triangulum ADE ad triangulum BAD. sed ut triangulum quidem CAB ad BAD triangulum, ita [c] CA ad AD, ut autem triangulum EAD ad ipsum BAD, ita [c] EA ad AB. ut [d] igitur CA ad AD, ita EA ad AB. quare triangulorum ABC ADE latera, quæ cirum æquales angulos, reciproca sunt. Et si reciproca sunt latera triangulorum ABC ADE, scil. sit ut CA ad AD, ita EA ad AB. dico triangulum ABC triangulo ADE æquale esse. juncta enim rursus BD, quoniam ut CA ad AD, ita est EA ad AB, ut autem CA ad AD, ita [c] ABC triangulum ad triangulum BAD; & ut EA ad AB, ita [c] triangulum EAD ad BAD triangulum, erit [d] ut ABC triangulum ad triangulum BAD, ita triangulum EAD ad BAD triangulum. utrumque igitur triangulorum ABC ADE ad triangulum BAD eandem habet proportionem; ac propterea [e] æquale est ABC triangulum



[b] 7. quinti.
[c] 1. hujus.
[d] 11. quinti.
[e] 9. quinti.

I 4 gulum

gulum triangulo ADE. Æqualium igitur, & unum uni æqualem habentium angulum triangulorum latera quæ circum æquales angulos, reciproca sunt: & quorum triangulorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos reciproca sunt, ea inter se sunt æqualia. Quod demonstrare oportebat.

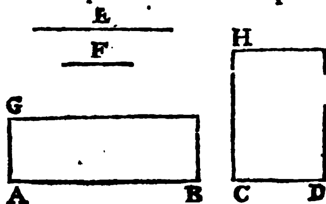
PROP. XVI. THEOR.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum sub extremis contentum æquale est ei rectangulo quod sub mediis continetur: Et si rectangulum sub extremis contentum æquale fuerit ei quod sub mediis continetur, quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales AB CD E F, sitque ut AB ad CD, ita E ad F. dico rectangulum contentum sub rectis lineis AB F æquale esse ei quod sub ipsis CD E

a 11. primi. continetur. ducantur enim a à punctis A C ipsis AB CD ad rectos angulos AG CH; ponaturque ipsi quidem F æqualis AG, ipsi vero E æqualis CH, & compleantur BG DH parallelogramma. Quoniam igitur est ut AB ad CD, ita E ad F; est autem E æqualis

b 7. quinti. CH, & F ipsi AG: erit b ut AB ad CD, ita CH ad AG. parallelogrammorum igitur BG DH latera, quæ sunt circum æquales angulos, reciproca sunt; quoniam autem æquiangulorum parallelogrammorum latera, quæ sunt circum æquales angulos,



c 14. hujus. reciproca sunt, ea inter se sunt c æqualia. ergo parallelogrammum BG æquale est parallelogrammo DH. atque est parallelogrammum quidem BG, quod sub rectis lineis AB F continetur, etenim AG est æqualis F; parallelogrammum vero DH, quod continetur sub ipsis CD E, cum CH ipsi E sit æqualis. rectangulum igitur contentum sub AB & F est æquale ei quod sub ipsis CD & E continetur. Et si rectangulum contentum sub AB F sit æquale ei quod sub CD & E continetur. dico quatuor rectas lineas proportionales esse, videlicet ut AB ad CD, ita E ad F. iisdem enim constructis quoniam rectangulum contentum sub AB & F est æquale ei quod sub CD & E continetur, atque est

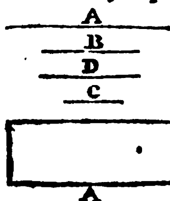
conten-

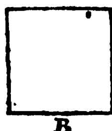
contentum quidem sub A B F rectangulum B G, etenim A G est æqualis F; contentum vero sub C D E est rectangulum D H, quòd C H ipsi E sit æqualis. erit parallelogrammum B G æquale parallelogrammo D H; & sunt æquiangula. æqualium autem & æquiangulorum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt. [c] quare ut A B ad C D, ita C H ad A G, æqualis autem est C H ipsi E, & A G ipsi F. ut igitur A B ad C D, ita E ad F. Ergo si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum sub extremis contentum æquale est ei est quod sub mediis continetur: & si rectangulum sub extremis contentum æquale fuerit ei quod sub mediis continetur, quatuor rectæ lineæ proportionales erunt. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XVII. THEOR.

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum sub extremis contentum æquale est ei quod à media fit quadrato: Et si rectangulum sub extremis contentum æquale fuerit ei quod à media fit quadrato, tres rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint tres rectæ linæa proportionales A B C; & sit ut A ad B, ita B ad C. dico rectangulum contentum sub A C æquale esse ei quod à media B fit quadrato. ponatur ipsi B æqualis D. Et quoniam ut A ab B, ita B ad C, æqualis autem B ipsi D; erit ut A ad B [a], ita D ad C si autem quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint rectangulum sub extremis contentum est [b] æquale ei quod sub mediis continetur. ergo rectangulum sub A C contentum est æquale ei quod continetur sub B D. sed rectangulum contentum sub B D est æquale quadrato quod fit ex ipsa B; etenim B est æqualis D. rectangulum igitur contentum sub A C est æquale ei quod ex B fit quadrato. Et si rectangulum contentum sub A C æquale sit quadrato quod fit ex B. dico ut A ad B, ita esse B ad C. iisdem enim constructis, quoniam rectangulum contentum sub A C æquale est quadrato quod fit ex B; at quadratum quod fit ex B est rectangulum quod sub ipsis B D continetur, est enim B æqualis ipsi D; erit rectangulum contentum sub A C æquale ei quod sub B D continetur. si autem rectangulum sub extremis contentum æquale fuerit ei quod sub mediis continetur, quatuor rectæ lineæ proportionales





[a] 7. quinti.

[b] 16. hujus.

proportionales

portionales *b* erunt. est igitur ut A ad B, ita D ad C; æqualis autem B ipsi D. ergo ut A ad B, ita B ad C. Si igitur tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum sub extremis contentum est æquale ei quod à media fit quadrato. Et si rectangulum sub extremis contentum æquale fuerit ei quod à media fit quadrato, tres rectæ lineæ proportionales erunt. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XVIII. PROBL.

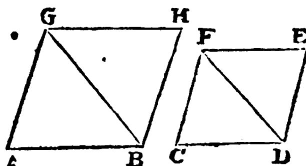
A data recta linea dato rectilineo simile & similiter positum rectilineum describere.

Sit data recta linea A B, datum autem rectilineum C E. oportet à recta linea A B rectilineo C E simile, & similiter positum rectilineum describere. Jungatur D F, & ad rectam lineam A B, & ad puncta in ipsa A B, angulo quidem C æ-

a 23. primi. qualis angulus *a* constituatur G A B, angulo autem C D F angulus A B G. reliquus igitur C F D angulus reliquo A G B

b 2. Cor. 32. primi. est *b* æqualis. ergo æquiangulum est F C D triangulum triangulo G A B; ac propte-

c 4. hujus. rea *c* ut F D ad G B, ita F C ad



G A, & C D ad A B. rursus constituatur ad rectam lineam B G, & ad puncta in ipsa B G, angulo quidem D F E æqualis angulus B G H, angulo quidem F D E æqualis G B H. ergo reliquus *b* ad E reliquo ad H est æqualis. æquiangulum igitur est triangulum F D E triangulo G B H. quare ut *c* F D ad G B, ita F E ad G H, & E D ad H B. ostensum autem est & ut F D

d 11. quinti. ad G B, ita F C ad G A, & C D ad A B: & ut igitur *d* F C ad A G, ita C D ad A B, & F E ad G H, & adhuc E D ad H B. itaque quoniam angulus quidem C F D est æqualis angulo A G B; angulus autem D F E angulo B G H. erit totus C F E angulus toti A G H æqualis. eadem ratione & C D E est æqualis ipsi A B H, & præterea angulus quidem ad C angulo ad A æqualis, angulus vero ad E angulo ad H. æquiangulum igitur est A H ipsi C E, & latera circum æquales ipsis angulos habet proportionalia. ergo rectilineum A H rectilineo C E si-

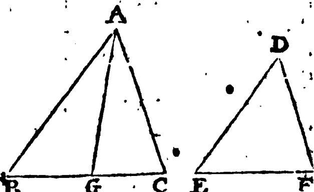
e 1. Def. hujus. mile *e* erit: A data igitur recta linea A B dato rectilineo C E simile, & similiter positum rectilineum A H descriptum est. Quod facere oportebat.

PROP.

PROP. XIX. THEOR.

Similia triangula inter se sunt in duplicata proportione laterum homologorum.

Sint similia triangula ABC DEF habentia angulum ad B æqualem angulo ad E, & sit ut AB ad BC, ita DE ad EF, ita ut latus BC homologum sit lateri EF. Dico ABC triangulum ad triangulum DEF duplicatam proportionem habere ejus quam habet BC ad EF. Sumatur enim ipsis [a] BC EF tertia proportionalis BG, ut sit BC ad EF ita EF ad BG. & jungatur GA. quoniam igitur ut AB ad BC, ita est DE ad EF; erit permutando ut AB ad DE, ita BC ad EF. sed ut BC ad EF, ita EF ad BG. ut [b] igitur AB ad DE, ita EF ad BG. quare triangulorum ABC DEF latera, quæ sunt circum æquales angulos, reciproca sunt. quorum autem triangulorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt, ea inter se æqualia [c] sunt. æquale igitur est ABG triangulum triangulo DEF. & quoniam est ut BC ad EF, ita EF ad BG; si autem tres rectæ lineæ proportionales sint, prima ad tertiam duplicatam proportionem [d] habet ejus quam habet ad secundam: habebit igitur BC ad BG duplicatam proportionem ejus quam habet BC ad EF. ut autem BC ad BG, ita ABC triangulum ad triangulum ABG [e]. ergo & ABC triangulum ad triangulum ABG duplicatam proportionem habet ejus quam BC habet ad EF. est autem ABG triangulum triangulo DEF æquale. & triangulum igitur ABC [f] ad triangulum DEF duplicatam proportionem habebit ejus quam habet BC ad EF. Quare similia triangula inter se sunt in duplicata proportione laterum homologorum. Quod ostendere oportebat.



[a] 11. hujus.
[b] 11. quinti.
[c] 15. hujus.
[d] Def. 10. quinti.
[e] 1. hujus.
[f] 7. quinti.

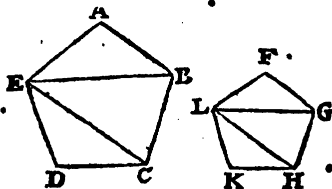
Cor. Ex hoc manifestum est, si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad tertiam, ita esse triangulum, quod fit à prima ad triangulum quod à secunda simile, & similiter descriptum; quoniam ostensum est ut CB ad BG, ita ABC triangulum ad triangulum ABG, hoc est ad triangulum DEF. Quod ostendere oportebat.

PROP.

PROP. XX. THEOR.

Similia polygona in similia triangula dividuntur, & numero æqualia, & homologa totis; & polygonum ad polygonum duplicatam proportionem habet ejus quam latus homologum habet ad homologum latus.

Sint similia polygona ABCDE FGHKL, & sit AB homologum ipsi FG. dico polygona ABCDE FGHKL in similia triangula dividi, & numero æqualia, & homologa totis; & polygonum ABCDE ad polygonum FGHKL duplicatam proportionem habere ejus quam habet AB ad FG. jungantur BE EC GL LH. Et quoniam simile est ABCDE polygonum polygono FGHKL, angulus BAE angulo GFL est [a] æqualis, atque est ut BA ad AE, ita GF ad FL. quoniam igitur duo triangula sunt ABE FGL unum angulum uni angulo æqualem habentia, circum æquales autem angulos latera proportionalia: erit [b] triangulum ABE triangulo FGL æquiangulum. ergo [c] & simile. angulus igitur ABE æqualis est angulo FGL. est autem & totus ABC angulus æqualis [a] toti FGH, propter similitudinem polygonorum. ergo reliquus EBC reliquo LGH est æqualis. & quoniam ob similitudinem triangulorum ABE FGL, est [a] ut EB ad BA, ita LG ad GF. sed & propter similitudinem polygonorum [a], ut AB ad BC, ita est FG ad GH; erit ex æquali ut [d] EB ad BC, ita LG ad GH. hoc est circum æquales angulos EBC LGH latera sunt proportionalia; æquiangulum igitur [b] est EBC triangulum triangulo LGH. quare & [c] simile. eadem ratione & ECD triangulum simile est triangulo LHK. similia igitur polygona ABCDE FGHKL in similia triangula dividuntur, & numero æqualia. dico & homologa totis: hoc est ut proportionalia sint triangula, & antecedentia quidem sunt ABE EBC ECD, consequentia autem ipsorum FGL LGH LHK; & ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL duplicatam proportionem habere ejus quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc est AB ad FG. quoniam enim simile est ABE triangulum triangulo FGL, habebit ABE triangulum ad triangulum EGL duplicatam proportionem [e] ejus quam habet BE ad GL. eadem ratione, & triangulum BEC ad GLH triangulum duplicatam [d] proportionem habet ejus quam BE ad GL. est [f] igitur ut ABE trian-



a 1. Def. hujus.
b 6. hujus.
c 4. hujus.
d 22. quinti.
e 19. hujus.
f 11. quinti.

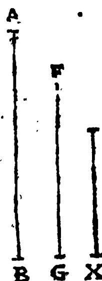
triangulum ad triangulum FGL, ita triangulum BEC ad GLH triangulum. rursus quoniam simile est triangulum EBC triangulo LGH, habebit EBC triangulum ad triangulum LGH duplicatam proportionem [e] ejus quam recta linea CE habet ad rectam HL. eadem ratione & ECD triangulum ad triangulum LHK duplicatam proportionem habet ejus quam CE ad HL. est [f] igitur ut triangulum BEC ad triangulum LGH, ita CED triangulum ad triangulum LHK. ostensum autem est & ut EBC triangulum ad triangulum LGH, ita triangulum ABE ad triangulum FGL. ergo ut triangulum ABE ad triangulum FGL, ita triangulum BEC ad GHL triangulum, & triangulum ECD ad ipsum LHK. & igitur ut unum antecedentium ad unum consequentium [g], sic omnia antecedentia ad omnia consequentia. ergo ut triangulum ABE ad triangulum FGL, ita ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL: sed ABE triangulum ad triangulum FGL duplicatam proportionem habet ejus quam latus homologum AB habet ad homologum latus FG, similia enim triangula in duplicata [h] sunt proportione laterum homologorum. ergo & ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL duplicatam proportionem habet ejus quam AB latus homologum habet ad FG homologum latus. Similia igitur polygona in similia triangula dividuntur, & numero æqualia, & homologa totis; & polygonum ad polygonum duplicatam habet proportionem ejus quam habet latus homologum ad homologum latus. Quod oportebat demonstrare.

[g] 12. quinti.
[h] 19. hujus.

Eodem modo & in similibus quadrilateris ostendetur ea esse in duplicata proportione laterum homologorum. ostensum autem est & triangulis.

COROLL.

1 Ergo universæ similes figuræ rectilineæ inter se sunt in duplicata proportione homologorum laterum. & si ipsis AB FG tertiam proportionalem sumamus, quæ sit X; habebit AB ad X duplicatam proportionem ejus quam habet AB ad FG. habet autem & polygonum ad polygonum, & quadrilaterum ad quadrilaterum duplicatam proportionem ejus quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc est AB ad FG. atque ostensum est hoc in triangulis.



2. Universe igitur manifestum est, si tres rectæ lineæ propor-

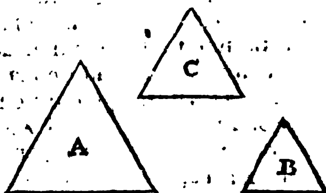
proportionales fuerint, ut prima ad tertiam, ita esse figuram quæ fit à prima, ad eam quæ à secunda, similem & similiter descriptam. Quod ostendere oportebat.

PROP. XXI. THEOR.

Quæ eidem rectilineo sunt similia, & inter se similia sunt.

Sit enim utrumque rectilineorum A B simile rectilineo C. dico & rectilineum A rectilineo B simile esse. Quoniam enim simile est A rectilineum rectilineo C, & ipsi æquiangulum [a] erit, & circum æquales angulos latera habebit proportionalia. rursus quoniam simile est rectilineum B rectilineo C, æquiangulum ipsi erit, & circum æquales angulos latera proportionalia habebit [a]. utrumque igitur rectilineorum A B ipsi C æquiangulum est & circum æquales angulos latera habet proportionalia. quare & rectilineum A ipsi B est æquiangulum, lateraque circum æquales angulos proportionalia habet; ac propterea [a] A ipsi B est simile. Quod demonstrare oportebat.

a 1. Def. hujus.



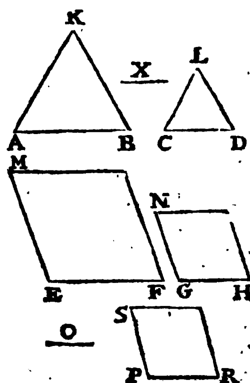
PROP. XXII. THEOR.

Si quatuor rectæ lineæ prrportionales fuerint, & rectilinea quæ ab ipsis fiunt, similia, & similiter descripta proportionalia erunt. & si rectilinea quæ ab ipsis fiant, similia, & similiter descripta, proportionalia fuerint, & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales A B C D E F G H, & ut A B ad C D, ita sit E F ad G H. describanturque [a] ab ipsis quidem A B C D similia, & similiter posita rectilinea K A B L C D: ab ipsis vero E F G H describantur rectilinea similia, & similiter posita M F N H. dico ut L A B rectilineum ad rectilineum L C D, ita esse rectilineum M F ad ipsam N H rectilineum. Sumatur ipsis [b] quidem A B C D tertia proportionalis X; ipsis vero E F G H tertia proportionalis O. & quoniam est ut A B ad C D, ita E F ad G H: ut autem C D ad X, ita G H ad O; erit ex æquali [c] ut A B ad X, ita E F ad O. sed ut A B quidem ad X, ita est [d] rectilineum K A B ad L C D rectilineum,

a 18. hujus. b 11. hujus. c 22. quinti. d 2. Cor. 20. hujus.

lineum, ut autem EF ad O, ita [d] rectilineum MF ad rectilineum NH. ut igitur KAB rectilinenm ad rectilineum LCD, ita est [e] rectilineum MF ad NH rectilineum. Et si sit ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita rectilineum MF ad rectilineum NH. dico ut AB ad CD, ita esse EF ad GH. fiat enim ut AB ad CD, ita EF ad [f] PR, & describatur [a] ab ipsa PR alterutri rectilineorum MF NH simile, & similiter positum rectilineum SR. quoniam igitur est ut AB ad CD, ita EF ad PR, & descripta sunt ab ipsis quidem AB CD similia, & similiter posita KAB LCD rectilinea, ab ipsis vero EF PR similia & similiter posita rectilinea MF SR, erit [g] ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita rectilineum MF ad RS rectilineum: ponitur autem & ut rectilineum KAB ad rectilineum LCD, ita MF rectilineum ad rectilineum NH. ergo ut rectilineum MF ad rectilineum NH, ita MF rectilineum ad rectilineum SR. quod cum rectilineum MF ad utrumque ipsorum NH SR eandem habeat proportionem, erit [h] rectilineum NH ipsi SR æquale. est autem ipsi simile, & similiter positum. ergo GH est æqualis PR. & quoniam ut AB ad CD, ita est EF ad PR: æqualis autem PR ipsi GH; erit ut AB ad CD, ita EF ad GH. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, & rectilinea quæ ab ipsis fiunt, similia, & similiter descripta proportionalia erunt: & si rectilinea quæ ab ipsis fiunt, similia, & similiter descripta proportionalia fuerint, & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt. Quod oportebat demonstrare.



[e] 11. quinti.

[f] 12. hujus.

[g] ex prius demonstratis.

[h] 9. quinti.

LEMMA.

Positis tribus rectis quibuscunque A, B *&* C; *ratio primæ* A *ad tertiam* C, *æqualis est rationi compositæ ex ratione primæ* A *ad secundam* B, *& ratione secundæ* B *ad tertiam* C.

Sit V. G. *numerus ternarius exponens seu denominator rationis* A *ad* B, *hoc est sit* A *triplo ipsius* B, *& sit numerus quaternarius exponens rationis* B *ad* C, *erit numerus duodenarius ex numeri ternarii & quaternarii multiplicatione compo-*

compositus exponens rationis A *ad* C; *nam quia* A *continet* B *ter*, & B *continet* C *quater*, *continebit* A *ipsum* C *ter quater*, *seu duodecies. idem de aliis multiplicibus vel submultiplicibus verum est. Universalis vero hujus Theorematis demonstratio talis est, Quantitas rationis* A *ad* B *est numerus* $\frac{A}{B}$, *scil. qui multiplicans consequentem producit antecedentem. Et similiter quantitas rationis* B *ad* C *est* $\frac{B}{C}$. *Atque hæ duæ quantitates inter se multiplicatæ efficiunt numerum* $\frac{A \times B}{B \times C}$ *qui est quantitas rationis quam rectangulum comprehensum sub rectis* A & B *habet ad rectangulum sub* B & C *rectis. Adeoque dicta ratio rectanguli sub* A & B, *ad rectangulum sub* B & C *ea est quæ in sensu def.* 5. *hujus, componitur ex rationibus* A *ad* B & B *ad* C. *sed per* 1. 6. *rectangulum sub* A & B, *est ad rectangulum sub* B & C, *ut* A *ad* C. & *igitur ratio* A *ad* C *æqualis est rationi compositæ ex rationibus* A *ad* B, & B *ad* C.

A———————————

B————

C——

Positis vero quatuor rectis quibuscunque A, B, C, & D; *Ratio primæ* A *ad quartam* D *æqualis est rationi compositæ ex ratione primæ* A *ad secundam* B, & *ratione secundæ* B *ad tertiam* C, & *ratione tertiæ* C *ad quartam* D.

Nam in tribus rectis A, C, & D, *ratio* A *ad* D *æqualis est rationi compositæ ex rationibus* A *ad* C, & C *ad* D. *Et hactenus est ostensum rationem* A *ad* C *æqualem esse rationi compositæ ex rationibus* A *ad* B & B *ad* C. *Et igitur ratio* A *ad* D *æqualis est rationi compositæ ex rationibus* A *ad* B, B *ad* C & C *ad* D. *Similiter ostendetur, in quotcunque rectis, rationem primæ ad ultimam æqualem esse rationi compositæ ex rationibus primæ ad secundam, secundæ ad tertiam, tertiæ ad quartam, & ita deinceps usque ad ultimam.*

A———————————

B——————————

C——————————

D————————

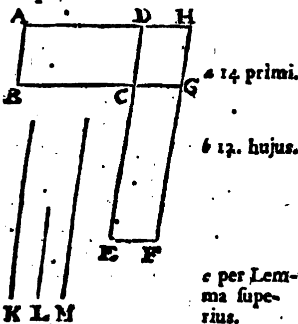
Si exponantur aliæ magnitudines quælibet, præter rectas, idem obtinebit. Quod constabit si concipiantur tot rectæ A, B, C &c. *ordine positæ quot sunt magnitudines, & in eadem ratione: ita* viz. *ut recta* A *sit ad rectam* B *ut prima magnitudo ad secundam, & recta* B *ad rectam* C *ut secunda magnitudo ad tertiam, & ita porro. Manifestum est per* 22. 5. *esse ex æquo rectam* A *ad ultimam rectam sicut prima magnitudo ad ultimam. Sed ratio rectæ* A *ad ultimam rectam æqualis est rationi compositæ ex rationibus* A *ad* B, B *ad* C, & *ita*

ita porro usque ad ultimam rectam. Et, ex hypothesi, ratio cujuslibet rectæ ad sibi proximam, eadem est cum ratione magnitudinis ejusdem ordinis ad sibi proximam. Et igitur ratio primæ magnitudinis ad ultimam, æqualis est rationi compositæ ex rationibus primæ magnitudinis ad secundam, secundæ ad tertiam, & ita deinceps usque ad ultimam. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXIII. THEOR.

Æquiangula parallelogramma inter se proportionem habent ex lateribus compositam.

Sint æquiangula parallelogramma AC CF æqualem habentia BCD angulum angulo ECG. dico parallelogrammum AC ad parallelogrammum CF proportionem habere compositam ex lateribus, videlicet compositam ex proportione quam habet BC ad CG, & ex proportione quam DC habet ad CE. ponatur enim ut BC sit in directum ipsi CG. ergo & DC ipsi CE in directum [a] erit: & compleatur DG parallelogrammum: exponaturque recta linea quædam K, & fiat ut BC ad CG, ita [b] K ad L, ut autem DC ad CE, ita L ad M. proportiones igitur ipsius K ad L, & L ad M eædem sunt quæ proportiones laterum videlicet BC ad CG, & DC ad CE. sed proportio K ad M, composita est [c] ex proportione K ad L, & proportione L ad M. quare & K ad M proportionem habet ex lateribus compositam. & quoniam est ut BC ad CG [d], ita AC parallelogrammum ad parallelogrammum CH; sed ut BC ad CG, ita K ad L: erit [e] ut K ad L, ita parallelogrammum AC ad CH parallelogrammum. rursus quoniam est ut DC ad CE, ita CH parallelogrammum ad parallelogrammum CF: ut autem DC ad CE, ita L ad M. ergo ut L ad M, ita erit [e] parallelogrammum CH ad CF parallelogrammum. itaque cum ostensum sit ut K quidem ad L ita AC parallelogrammum ad parallelogrammum CH: ut autem L ad M, ita parallelogrammum CH ad CF parallelogrammum; erit [f] ex æquali ut K ad M, ita AC parallelogrammum ad ipsum CF. habet autem K ad M proportionem ex lateribus compositam. ergo & AC parallelogrammum ad parallelogrammum CF proportionem habebit compositam ex lateribus. Æquiangula igitur paral-



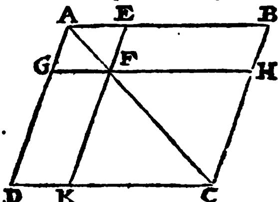
a 14 primi.
b 12. hujus.
c per Lemma superius.
d 1. hujus.
e 11. quinti.
f 22. quinti.

lelogramma inter se proportionem habent ex lateribus compositam. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXIV. THEOR.

Omnis parallelogrammi, quæ circa diametrum sunt parallelogrammi, & toti, & inter se similia sunt.

Sit parallelogramma ABCD, cujus diameter AC: circa diametrum vero AC parallelogramma sint EG HK. dico parallelogramma EG HK & toti ABCD, & inter se similia esse. Quoniam enim uni laterum trianguli ABC, videlicet ipsi BC parallela ducta est EF, erit *a* ut BE ad EA, ita CF ad EA. quoniam rursus uni laterum trianguli ACD, nempe ipsi CD ducta est parallela



a 2. hujus. FG, ut CF ad FA, ita *a* erit DG ad GA. sed ut CF ad FA ita ostensa est & BE ad EA. ergo & ut BE ad

b 11. quinti. EA, ita *b* DG ad GA, com-

c 18. quinti. ponendoque *c* ut BA ad AE, ita DA ad AG. & permutando ut BA ad AD, ita EA ad AG. parallelogrammorum igitur ABCD & EG latera, quæ circa communem angulum BAD, proportionalia sunt. & quoniam parallela est GF ipsi

d 29. primi. DC, angulus quidem AGF est *d* æqualis angulo ADC, angulus vero GFA æqualis angulo DCA, & angulus DAC est communis duobus triangulis ADC AGF; erit igitur triangulum ADC triangulo AGF æquiangulum. eadem ratione & triangulum ACB æquiangnlum est triangulo AFE. totum igitur parallelogrammum ABCD parallelogrammo EG est æ-

e 4. hujus. quiangulum. ergo ut AD ad DC, ita *e* AG ad GF, ut autem DC ad CA, ita GF ad FA, & ut AC ad CB, ita AF ad FE, & præterea ut CA ad BA, ita FE ad EA. itaque quoniam ostensum est ut DC ad CA, ita esse GF ad FA, ut autem

f 22. quinti. AC ad CB, ita AF ad FE; erit *f* ex æquali ut DC ad CB, ita GF ad FE. ergo parallelogrammorum ABCD & EG proportionalia sunt latera quæ circum æquales angulos, ac propte-

g 1. Def. hujus. rea *g* parallelogrammum ABCD parallelogrammo EG est simile. eadem ratione, & parallelogrammum ABCD simile est parallelogrammo KG. utrumque igitur ipsorum EG HK parallelogrammorum, parallelogrammo ABCD est simile. quæ autem eidem rectilineo sunt similia, & inter se similia

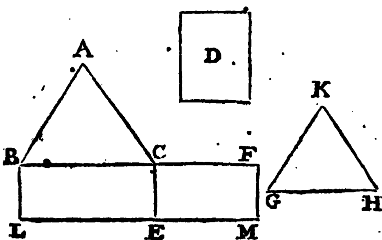
h 21. hujus. *h* sunt. parallelogrammum igitur EG simile est parallelogrammo HK. Quare omnis parallelogrammi, quæ circa diametrum

trum sunt parallelogramma, & toti, & inter se sunt similia. Quod ostendere oportebat.

PROP. XXV. PROBL.

Dato rectilineo, simile, & alteri dato æquale idem constituere.

Sit datum quidem rectilineum cui oportet simile constituere ABC, cui autem æquale sit D. oportet ipsi ABC simile, & ipsi D æquale idem constituere. Applicetur [a] ad rectam quidem lineam BC rectilineo ABC æquale parallelogrammum BE. ad rectam vero CE applicetur [a] parallelogrammum CM æquale ipsi D, in angulo FCE, qui CBL angulo est æqualis. in directum igitur [b] est BC ipsi CF, & LE ipsi EM. sumantur [c] inter BC CF media proportionalis GH, & [d] ab ipsa GH describatur rectilineum KGH simile & similiter positum rectilineo ABC. Et quoniam est ut BC ad GH, ita GH ad CF, si autem tres rectæ lineæ proportionales sint, ut prima ad tertiam [e], ita est figura quæ fit à prima, ad eam quæ à secunda, similem & similiter descriptam: erit ut BC ad CF, ita ABC rectilineum ad rectilineum KGH. sed & ut BC ad CF, ita [f] parallelogrammum BE ad EF parallelogrammum, ut [g] igitur rectilineum ABC ad rectilineum KGH, ita BE parallelogrammum ad parallelogrammum EF. quare [h] permutando ut ABC rectilineum ad parallelogrammum BE, ita rectilineum KGH ad EF parallelogrammum. est autem rectilineum ABC æquale parallelogrammo BE. æquale igitur est & KGH rectilineum parallelogrammo EF. sed EF parallelogrammum æquale est rectilineo D. ergo & rectilineum KGH ipsi D est æquale: est autem GKH simile rectilineo ABC. Dato igitur rectilineo ABC simile, & alteri dato D æquale idem constitutum est KGH. Quod facere oportebat.

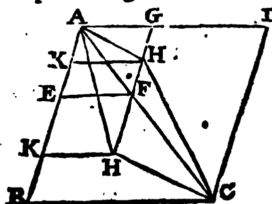


[a] 44. primi.
[b] 14. primi.
[c] 13. hujus.
[d] 18. hujus.
[e] 2. Cor. 20. hujus.
[f] 1. hujus.
[g] 11. quinti.
[h] 16. quinti.

PROP. XXVI. THEOR.

Si à parallelogrammo parallelogrammum auferatur simile toti, & similiter positum, communem ipsi angulum habens, circa eandem diametrum est toti.

A parallelogrammo enim A B C D parallelogrammum A F auferatur, simile ipsi A B C D, & similiter positum communemque ipsi angulum habens D A B. dico parallelogrammum ABCD circa eandem esse diametrum parallelogrammo AF. Non enim, sed si fieri potest, sit parallelogrammi BD diameter AHC, & producatur GF usque ad H; ducaturque per H alterutri ipsarum A D, B C parallela H K. Quoniam igitur circa eandem diametrum est A B C D parallelogrammum



a 24. hujus. parallelogrammo K G; & erit[a] parallelogrammum A B C D
b 1. Def. hujus. parallelogrammo K G simile. ergo ut [b] D A ad A B, ita G A ad A K. est autem & propter similitudinem parallelogrammo-
c 11. quinti. rum A B C D E G, ut D A ad A B, ita G A ad A E. & [c] igitur ut G A ad A E, ita G A ad A K. quòd cum G A ad utramque
d 9. quinti. ipsarum A K A E eandem proportionem habeat; erit [d] A E ipsi A K æqualis, minor majori, quod fieri non potest. non igitur circa eandem diametrum est A B C D parallelogrammum parallelogrammo A H. quare circa eandem diametrum erit ipsi A F. Si igitur à parallelogrammo parallelogrammum auferatur simile toti, & similiter positum, communem ipsi angulum habens, circa eandem diametrum est toti. Quod demonstrare oportebat.

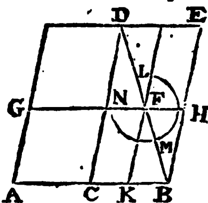
PROP. XXVII. THEOR.

Omnium parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis similibus, & similiter positis ei quæ à dimidio describitur: maximum est quod ad dimidium est applicatum, simile existens defectui.

Sit recta linea A B; seceturque bifariam in C; & ad A B rectam lineam applicetur parallelogrammum A D deficiens figura parallelogramma C E, simili & similiter posita ei quæ à dimidio ipsius A B descripta est. dico omnium

paralle-

parallelogrammorum ad rectam lineam A B applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis similibus, & similiter positis ipsi C E, maximum esse A D. Applicetur enim ad rectam lineam A B parallelogrammum A F, deficiens figura parallelogramma H K simili, & similiter posita ipsi C E. dico A D parallelogrammum parallelogrammo A F majus esse.



Quoniam enim simile est parallelogrammum C E parallelogrammo H K, circa eandem diametrum [a] sunt. ducatur eorum diameter D B, & describatur figura. quoniam igitur C F [b] est æquale ipsi F E, commune apponatur H K. totum igitur C H toti K E est æquale. sed C H est [c] æquale G G, quoniam & recta linea A C ipsi C B. ergo & G C ipsi E K æquale est. commune apponatur C F. totum igitur A F est æquale gnomoni L M N: quare & C E, hoc est A D parallelogrammum parallelogrammo A F est majus. Omnium igitur parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis similibus, & similiter positis ei quæ à dimidia describitur, maximum est quod ad dimidium est applicatum. Quod demonstrare oportebat.

[a] 26. hujus. [b] 43. primi. [c] 36. primi.

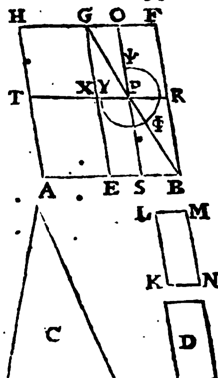
PROP. XXVIII. PROBL.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma quæ similis sit alteri datæ: oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non majus esse eo quod ad dimidiam applicatur, similibus existentibus defectibus, & eo quod à dimidio, & eo cui oportet simile deficere.

Sit data quidem recta linea A B: datum autem rectilineum, cui oportet æquale ad datam rectam lineam A B applicare, sit C, non majus existens eo quod ad dimidium applicatum est, similibus existentibus defectibus: cui autem oportet simile deficere sit D. oportet ad datam rectam lineam A B, dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit ipsi D. Secetur A B bifariam in E, & ab ipsa E B describatur [a] simile, & similiter positum ipsi D; quod sit E B F G, & compleatur A G parallelogrammum. itaque A G vel æquale est ipsi C, vel eo majus,

[a] 18. hujus.

ob determinationem: & si quidem AG sit æquale C, factum jam erit quod proponebatur: etenim ad rectam lineam AB dato rectilineo C æquale parallelogrammum AG applicatum est, deficiens figura parallelogramma EF ipsi D simili. si autem non est æquale, erit HE majus quàm C; atque EF æquale est HE. ergo, & EF quàm C est majus. quo autem EF superat C, ei excessui æquale, ipsi vero D simile & similiter positum, idem [a] constituatur KLMN. sed D est simile EF. quare & KM ipsi EF simile erit. sit igitur recta linea KL homologa ipsi GE, LM vero ipsi GF. & quoniam æquale est EF ipsis C & KM, erit EF ipso KM majus. major [b] igitur est recta linea GE ipsa KL & GF ipsa LM. ponatur GX æqualis KL, & GO æqualis LM, & compleatur XGOP parallelogrammum. æquale igitur est & simile XO ipsi KM. sed KM simile est EF. ergo & [c] XO ipsi EF est simile. circa eandem igitur est [d] diametrum XO ipsi EF. sit ipsorum diameter GPB, & figura describatur. itaque quoniam EF est æquale ipsis C & KM simul, quorum XO est æquale KM, erit reliquus ΥΦΨ gnomon æqualis reliquo C. & quoniam OR est [e] æquale XS, commune apponatur SR. totum igitur OB toti XB est æquale. sed XB est [f] æquale TE, quoniam & latus AE lateri EB. quare & TE ipsi OB æquale. commune apponatur XS. ergo totum TS est æquale toti gnomoni ΥΦΨ. at ΥΦΨ gnomon ipsi C ostensus est æqualis: & TS igitur ipsi C æquale erit. Quare ad datam rectam lineam AB, dato rectiilneo C, æquale parallelogrammum TS appicatum est, deficiens figura parallelogramma SR ipsi D simili, quoniam & SR simile est ipsi GB. Quod facere oportebat.



[a] 25. hujus.
[b] Cor. 20. hujus.
[c] 21. hujus.
[d] 26. hujus.
[e] 43. primi.
[f] 36. primi.

PROP. XXIX. PROBL.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri datæ.

Sit data recta linea AB, datum vero rectilineum, cui oportet æquale ad ipsam AB applicare, sit C; cui autem oportet simile excedere D. oportet ad rectam lineam dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicare, excedens figura

gura parallelogramma simili D. Secetur A B bifariam in E, atque ex E B ipsi D simile, & similiter [a] positum parallelogrammum describatur E L. & utriusque quidem E L & C æquale, ipsi vero D simile, & similiter positum idem [b] constituatur G H. simile igitur est G H ipsi E L. sitque K H quidem latus homologum lateri F L, K G vero ipsi F E. & quoniam parallelogrammum G H majus est ipso E L, erit recta linea K H major quàm F L, & K G major quàm F E. producantur F L F E, & ipsi quidem K H æqualis sit F L M, ipsi vero K G æqualis F E N, & compleatur M N parallelogrammum. ergo M N æquale est & simile ipsi G H. sed G H est simile E L: M N igitur ipsi E L simile [c] erit; ac propterea circa eandem diametrum [d] est E L ipsi M N. ducatur ipsorum diameter E X, & figura describatur. itaque quoniam G H ipsi E L & C est æquale, sed G H est æquale M N; erit & M N æquale ipsi E L & C. commune auferatur E L. reliquus igitur Υ Φ Ψ gnomon ipsi C est æqualis. & quoniam A E est æqualis E B, æquale [e] erit & A N parallelogrammum parallelogrammo E P, hoc est ipsi [f] L O. commune apponatur E X. totum igitur A X æquale est gnomoni Υ Φ Ψ. sed Υ Φ Ψ gnomon est æqualis C. ergo & A X ipsi C erit æquale. ad datam igitur rectam lineam A B dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicatum est A X, excedens figura parallelogramma P O, ipsi D simili, quoniam & ipsi E L simile [g] est O P. Quod fecisse oportebat.

a 18. hujus.
b 25. hujus.
c 21. hujus.
d 26. hujus.
e 36 primi.
f 43. primi.
g 24. hujus.

G K H C L M F D A E B O N P X Ψ Φ Υ

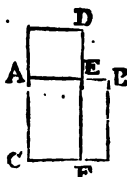
PROP. XXX. PROBL.

Datam rectam lineam termiatam extrema ac media ratione secare.

Sit data recta linea terminata A B oportet ipsum A B extrema ac media ratione secare. Describatur [a] ex A B quadratum B C, & ad A C ipsi B C æquale parallelogrammum [b] applicetur C D, excedens [b] figura A D ipsi B C simili. quadratum autem est B C, ergo & A D quadratum erit. & quoniam B C est æquale C D; commune auferatur C E. reliquum igitur B F reliquo A D est æquale. est autem & ipsi æquiangulum. ergo ipsorum B F A D latera, quæ circum æquales

a 46. primi.
b 29. hujus.

c 14. hujus. angulos, reciproce sunt c proportionalia. ut igitur FE ad ED, ita est AE ad EB. est
d 34. primi. autem FE æqualis d AC, hoc est ipsi AB; & ED ipsi AE. quare ut BA ad AE, ita AE ad EB. sed AB major est quam AE. ergo AE quam
e 14 quinti. EB est e major. recta igitur linea AB extrema, ac media ratione secta est in E. & majus ipsius segmentum est AE. Quod facere oportebat.

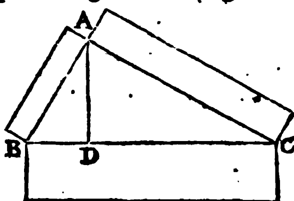


Aliter. Sit data recta linea AB. oportet ipsam AB extrema ac media ratione secare. Secetur enim AB in C, ita ut
f 11. secundi. rectangulum f quod continetur sub AB BC æquale sit quadrato ex AC. quoniam igitur rectangulum sub AB BC æ-
g 17. hujus. quale est quadrato ex AC, erit g ut BA ad AC ita AC ad CB. ergo AB recta linea extrema ac media ratione secta est. Quod facere oportebat.

PROP. XXXI. THEOR.

In rectangulis triangulis figura quæ fit à latere rectam angulum subtendente, æqualis est eis quæ à lateribus rectum angulum continentibus fiunt, similibus, & similiter descriptis.

Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens angulum BAC. dico figuram, quæ fit ex BC æqualem esse eis quæ ex BA AC fiunt similibus, & similiter descriptis. ducatur perpendicularis AD. Quoniam igitur in triangulo rectangulo ACB ab angulo recto, qui est ad A, ad BC basim perpendicularis ducta
a 8. hujus. est AD, erunt a triangula ABD ADC quæ sunt ad perpendicularem similia toti ABC, & inter se. & quoniam simile est ABC triangulum triangulo ABD, erit ut a CB ad BA, ita BA ad BD. quod cum tres rectæ lineæ proportionales sint, ut prima
b 2. Cor. 20. hujus. ad tertiam, ita erit b figura quæ fit ex prima ad eam quæ ex secunda, similem, & similiter descriptam. ut igitur CB ad BD, ita figura quæ fit ex CB ad eam quæ ex BA, similem & similiter descriptam. eadem ratione, & ut BC ad CD, ita figura quæ fit ex BC ad eam quæ ex CA. quare & ut BC ad ipsas,



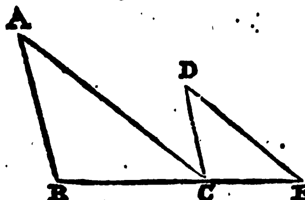
ipsas BD DC, ita [c] figura quæ ex BC ad eas quæ ex BA AC, similes, & similiter descriptas. æqualis autem est BC ipsis BD DC. ergo figura quæ fit ex BC æqualis est eis quæ ex BA AC fiunt, similibus, & similiter descriptis. in rectangulis igitur triangulis, figura quæ fit à latere rectum angulum subtendente, æqualis est eis quæ à lateribus rectum angulum continentibus fiunt, similibus, & similiter descriptis. Quod ostendere oportebat. c 24. quinti.

PROP. XXXII. THEOR.

Si duo triangula componantur ad unum angulum, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ita ut homologa latera ipsorum etiam sint parallela, reliqua triangulorum latera in directum sibi ipsis constituta erunt.

Sint duo triangula ABC DCE quæ duo latera BA AC duobus lateribus CD DE proportionalia habeant, scil. sit sicut BA ad AC, ita CD ad DE; parallela autem sit AB ipsi DC & AC ipsi DE. dico BC ipsi CE in directum esse. Quoniam enim AB parallela est DC, & in ipsas incidit recta linea AC; erunt [a] anguli alterni BAC ACD æquales inter se. eadem ratione, & angulus CDE æqualis est angulo ACD. quare & BAC ipsi CDE est æqualis. & quoniam duo triangula sunt ABC DCE, unum angulum ad A, uni angulo ad D æqualem habentia, circum æquales autem angulos latera proportionalia, quod sit ut BA ad AC, ita CD ad DE; erit [b] triangulum ABC triangulo DCE æquiangulum. ergo ABC angulus est æqualis angulo DCE. ostensus autem est & angulus ACD æqualis angulo BAC. totus igitur ACE duobus ABC BAC est æqualis. communis apponatur ACB. ergo anguli ACE ACB angulis BAC ACB CBA æquales sunt. sed BAC ACB CBA anguli duobus rectis [c] sunt æquales. & anguli igitur ACE ACB duobus rectis æquales erunt. itaque ad quandam rectam lineam AC, & ad punctum in ipsa C, duæ rectæ lineæ BC CE non ad easdem partes positæ, angulos qui deinceps sunt ACE ACB duobus rectis æquales efficiunt. ergo BC ipsi CE in directum [d] erit. Si igitur duo triangula componantur ad unum angulum quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant

a 29. primi.



b 6. hujus.

c 32. primi.

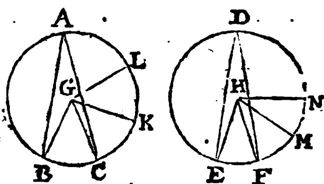
d 14. primi.

beant, ita ut homologa latera ipsorum etiam sunt parallelæ; reliqua triangulorum latera in directum sibi ipsis constituta erunt. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXXIII. THEOR.

In circulis æqualibus anguli eandem habent proportionem, quam circumferentiæ quibus insistant, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant: adhuc autem & sectores, quippe qui ad centra sunt constituti.

Sint æquales circuli ABC DEF; & ad centra quidem ipsorum G H sint anguli BGC EHF, ad circumferentias vero anguli BAC EDF. dico ut circumferentia BC ad EF circumferentiam, ita esse & BGC angulum ad angulum EHF, & angulum BAC ad angulum EDF: & adhuc sectorem BGC ad EHF sectorem. ponantur enim circumferentiæ quidem BC æquales quotcunque deinceps CK KL; circumferentiæ vero EF, rursus æquales quotcunque FM MN. & jungantur GK GL, HM HN. Quoniam igitur circumferentiæ BC CK KL inter se sunt æquales, & anguli

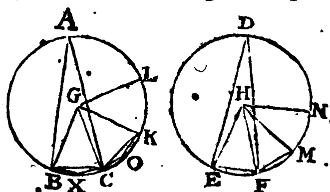


a 27. tertii. BGC CGK KGL inter se æquales [a] erunt. quotuplex igitur est circumferentia BL circumferentiæ BC, totuplex est & BGL angulus anguli BGC. eadem ratione & quotuplex est circumferentia NE circumferentiæ EF, totuplex & EHN angulus anguli EHF. si vero æqualis est BL circumferentia circumferentiæ EN; & angulus BGL angulo EHN erit æqualis; & si circumferentia BL major est circumferentia EN, major erit & BGL angulus angulo EHN; & si minor, minor. quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus nimirum circumferentiis BC EF, & duobus angulis BGC EHF; sumptæ sunt circumferentiæ quidem BC, & BGC anguli, æque multiplicia, videlicet circumferentia BL & BGL angulus; circumferentiæ vero EB, & EHF anguli, æque multiplicia, nempe circumferentia EN, & angulus EHN. atque ostensum est si circumferentia BL superat circumferentiam EN, & BGL angulum superare angulum EHN; & si æqualis, æqualem; & si minor, minorem esse. ut [b] igitur circumferentia BC ad EF circumferentiam, ita angulus BGC ad angulum EHF. sed ut BGC angulus ad angulum EHF, ita

b Def. 5. quinti.

angulus

c angulus BAC ad EDF angulum, uterque enim utriusque *c* 15. quinti.
est *d* duplex. & ut igitur BC circumferentia ad circumferen- *d* 20. tertii.
tiam EF, ita & angulus BGC ad angulum EHF, & angulus BAC ad EDF angulum. quare in circulis æqualibus anguli eandem habent proportionem quàm circumferentiæ quibus insistunt, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant. dico insuper & ut BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita esse sectorem GBC ad HEF sectorem. Jungantur enim BC CK, & sumptis in circumferentiis BC CK punctis XO, jungantnr & BX XC CO OK. itaque quoniam duæ BG GC duabus CG GK æquales sunt, & angulos æquales continent; erit & basis BC basi CK æqualis: æquale *e* igitur est GBC triangulum triangulo GCK. & quoniam circumferentia BC circumferentiæ CK est æqualis, & reliqua circumferentia quæ complet totum circulum ABC æqualis est reliquæ quæ eundem circulum complet. quare & angulus BXC angulo COK est *f* æqualis. simile igitur est BXC segmentum *g* segmento COK: & sunt in æqualibus rectis lineis BG GK. quæ autem in æqualibus rectis lineis similia circulorum segmenta, & inter se *h* æqualia sunt. ergo segmentum BXC est æquale segmento COK. est autem & BGC triangulum triangulo CGK æquale. & totus igitur sector BGC sectori CGK æqualis erit. Eadem ratione & GKL sector utrique ipsorum GBC GCK est æqualis. tres igitur sectores BGC CGK KGL æquales sunt inter se. similiter & sectores HEF HFM HMN inter se sunt æquales. quotuplex igitur est LB circumferentia circumferentiæ BC, totuplex est & GBL sector sectoris GBC. eadem ratione & quotuplex est circumferentia NE circumferentiæ EF, totuplex est & HEN sector sectoris HEF. Sed si circumferentia BL circumferentiæ EN est æqualis, & sector BGL æqualis est sectori EHN; & si circumferentia BL superat circumferentiam EN, superat & BGL sector sectorrm EHN; & si minor, minor. quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus quidem BC EF circumferentiis, duobus vero sectoribus GBC EHF, sumpta sunt æque multiplicia circumferentiæ quidem BC & GBC sectoris, circumferentia BL, & GBL sector. circumferentiæ vero EF, & sectoris HEF, æque multiplicia, circumferentia EN, & HEN sector, atque ostensum est si BL circumferentia superat circumferentiam EN, & sectorem BGL superare sectorem EHN; & si æqualis, æqualem esse; & si minor, minorem.



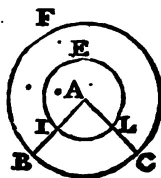
e 4. primi.
f 27. tertii.
g 11. Def. tertii.
h 24. tertii.

minorem. est [b] igitur ut BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita sector GBC ad HEF sectorem. Quod ostendere oportebat.

COROLL.

1. Angulus ad centrum est ad quatuor rectos, ut arcus cui insistit ad totam circumferentiam: nam ut angulus BAC ad rectum, ita BC arcus ad circuli quadrantem; quare quadruplicando consequentes, erit angulus BAC ad quatuor rectos, ut arcus BC ad totam circumferentiam.

2. Inæqualium circulorum arcus IL BC qui æquales subtendunt angulos, sive ad centra, sive ad peripherias, sunt similes. Nam est IL ad totam peripheriam ILE, ut angulus IAL ad quatuor rectos: est vero ut IAL seu BAC ad quatuor rectos, ita arcus BC ad totam peripheriam BCF. quare ut IL ad totam peripheriam ILE, ita BC ad totam peripheriam BCF. ac proinde arcus IL BC sunt similes.



3. Duæ semidiametri AB AC à concentricis peripheriis arcus auferunt similes IL BC.

EUCLIDIS

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER UNDECIMUS.

DEFINITIONES.

I.

SOlidum est, quod longitudinem, latitudinem & crassitudinem habet.

II.

Solidi terminus est superficies.

III.

Recta linea ad planum recta est, quando ad omnes rectas lineas quæ ipsam contingunt, & in subjecto sunt plano, rectos angulos efficit.

IV.

Planum ad Planum rectum est, cum rectæ lineæ quæ communi planorum sectioni ad rectos angulos in uno plano ducuntur, alteri plano ad rectos sunt angulos.

V.

Rectæ lineæ ad planum inclinatio est, cum à sublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis; atque à puncto quod perpendicularis in ipso plano effecerit, ad propositæ illius lineæ extremum, quod in eodem est plano, altera recta linea fuerit adjuncta; est, inquam, angulus acutus insistente linea, & adjuncta comprehensus.

VI.

VI.

Plani ad planum inclinatio eſt, angulus acutus rectis lineis contentus, quæ in utroque planorum ad idem communis ſectionis punctum ductæ, rectos cum ſectione angulos efficiunt.

VII.

Planum ad planum ſimiliter inclinari dicitur, atque alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter ſe fuerint æquales.

VIII.

Parallela plana ſunt, quæ inter ſe non conveniunt.

IX.

Similes ſolidæ figuræ ſunt, quæ ſimilibus planis continentur, multitudine æqualibus.

X.

Æquales & ſimiles ſolidæ figuræ ſunt, quæ ſimilibus planis multitudine & magnitudine æqualibus continentur.

XI.

Solidus angulus eſt, plurium quàm duarum linearum quæ ſe mutuo contingunt, nec in eadem ſunt ſuperficie, ad omnes lineas inclinatio. Vel ſolidus angulus eſt, qui pluribus quàm duobus planis angulis in eodem non conſiſtentibus plano, ſed ad unum punctum conſtitutis continetur.

XII.

Pyramis eſt figura ſolida planis comprehenſa, quæ ab uno plano ad unum punctum conſtituuntur.

XIII.

Priſma eſt figura ſolida quæ planis continetur, quorum adverſa duo ſunt & æqualia & ſimilia, & parallela; alia vero parallelogramma.

XIV.

Sphæra eſt, quando ſemicirculi manente diametro, circumductus ſemicirculus in ſeipſum rurſus revolvitur unde moveri cœperat.

XV.

XV.

Axis autem sphæræ est quiescens illa recta linea, circum quam semicirculus convertitur.

XVI.

Centrum sphæræ est idem quod & semicirculi.

XVII.

Diameter autem sphæræ est recta quædam linea per centrum ducta, & utrinque à sphæræ superficie terminata.

XVIII.

Conus est, quando rectanguli trianguli manente uno latere eorum quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in seipsum rursus revolvitur, unde moveri cœperat. Atque si quiescens recta linea æqualis sit reliquæ quæ circa rectum angulum continetur, orthogonius erit conus: si vero minor, amblygonius: si vero major, oxygonius.

XIX.

Axis autem coni est quiescens illa linea, circa quam triangulum vertitur.

XX.

Basis vero coni est circulus qui à circumducta recta linea describitur.

XXI.

Cylindrus est, quando rectanguli parallelogrammi manente uno latere eorum quæ circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum in seipsum rursus revolvitur, unde cœperat moveri.

XXII.

Axis autem cylindri est quiescens illa recta linea, circum quam parallelogrammum convertitur.

XXIII.

Bases vero cylindri sunt circuli à duobus adversis lateribus, quæ circumaguntur, descripti.

XXIV.

Similes coni & cylindri sunt, quorum & axes, & basium diametri proportionales sunt.

XXV.

XXV.

Cubus est figura solida sub sex quadratis æqualibus contenta.

XXVI.

Tetraedrum est figura solida sub quatuor triangulis æqualibus & æquilateris contenta.

XXVII.

Octaedrum est figura solida sub octo triangulis æqualibus & æquilateris contenta.

XXVIII.

Dodecaedrum est figura solida sub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis contenta.

XXIX.

Icosaedrum est figura solida sub virginti triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

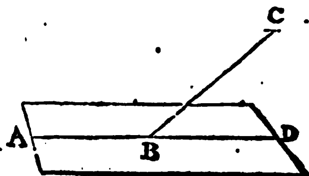
XXX.

Parallelippipedum est figura solida sex figuris quadrilateris, quarum quæ ex adverso parallelæ sunt, contenta.

PROPOSITIO I. THEOREMA.

Rectæ lineæ pars quædam non est in subjecto plano, quædam vero in sublimi.

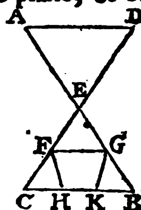
Si enim fieri potest, rectæ lineæ AB pars quidem AB sit in subjecto plano, pars vero BC in sublimi. erit recta linea quædam ipsi AB in directum continuata in subjecto plano. sitque DB. duabus igitur datis rectis lineis ABC ABD commune segmentum est AB, quod fieri non potest; recta enim linea cum recta linea non convenit in pluribus punctis, quàm uno. Non igitur rectæ lineæ pars quædam est in subjecto plano, quædam vero in sublimi. Quod demonstrare oportebat.



PROP. II. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ se invicem secent, in uno sunt plano, & omne triangulum in uno plano consistit.

Duæ enim rectæ lineæ A B C D se invicem in puncto E secent. dico ipsas A B C D in uno esse plano, & omne triangulum in uno plano consistere. Sumantur enim in ipsis E B E C quævis puncta F G; junganturque C B F G, & F H G K ducantur. dico primum E B C triangulum consistere in uno plano. si enim trianguli E B C pars quædam, F H C, vel G B K in subjecto plano est, reliqua vero in alio plano; erit & linearum E B E C pars in subjecto plano, & pars in alio. quod si trianguli E C B pars F C B G sit in subjecto plano, reliqua vero in alio, utrarumque rectarum linearum E C E B quædam pars erit in subjecto plano, quædam vero in alio. quod absurdum esse [a] ostendimus. triangulum igitur E B C in uno est plano. in quo autem plano est B C E triangulum, in hoc est utraque ipsarum E C E B: in quo autem utraque ipsarum E C E B, in hoc [a] sunt & A B C D. Ergo rectæ lineæ A B C D in uno sunt plano, & omne triangulum in uno plano consistit. Quod erat demonstrandum.

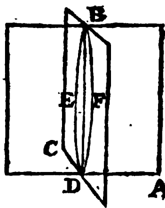


[a] 1. hujus.

PROP. III. THEOR.

Si duo plana se invicem secent, communis ipsorum sectio recta linea erit.

Duo plana A B B C se invicem secent, communis autem ipsorum sectio sit D B linea. dico lineam D B rectam esse si enim non ita sit, ducatur à puncto D ad B in plano quidem A B recta linea D E B; in plano autem B C recta linea D F B. erunt utique duarum rectarum linearum D E B D F B iidem termini, & ipsæ spatium continebunt, quod est absurdum [a]. non igitur D E B D F B rectæ lineæ sunt. similiter ostendemus neque aliam quampiam, quæ à puncto D ab B ducitur rectam esse, præter ipsam D B communem scilicet planorum A B B C sectionem. Si igitur duo plana se invicem secent, communis ipsorum sectio recta linea erit. Quod ostendere oportebat.

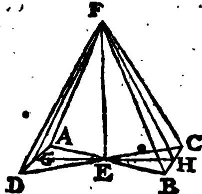


[a] Axio. 10. primi.

PROP. IV. THEOR.

Si recta linea duabus rectis lineis se invicem secantibus in communi sectione ad rectos angulos insistat, etiam ducto per ipsas plano ad rectos angulos erit.

Recta linea quædam EF duabus rectis lineis AB CD se invicem secantibus in E puncto, ab ipso E ad rectos angulos insistat: dico EF etiam plano per EB CD ducto ad rectos angulos esse. Sumantur rectæ lineæ EA EB CE DE inter se æquales: perque E ducatur recta linea GEH utcunque: & jungantur AD CB; deinde à quovis puncto F ducantur FA FG FD FC FH FB. & quoniam duæ rectæ lineæ AE ED duabus rectis lineis CE EB æquales sunt, &



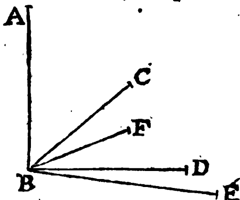
a 15. primi. angulos [a] æquales AED CEB continent, erit [b] AD basis basi
b 4. primi. CB æqualis, & triangulum AED triangulo CEB æquale. ergo & angulus DAE æqualis est angulo EBC. est autem & angulus AEG [a] æqualis angulo BEH. duo igitur triangula sunt AGE BEH, duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & unum latus AE uni lateri EB æquale quod est ad æquales angulos. quare & reliqua latera
c 26. primi. reliquis lateribus æqualia habebunt [c]. ergo GE quidem est æqualis EH; AG vero ipsi BH. quod cum AE sit æqualis EB, communis autem, & ad rectos angulos FE; erit [b] basis AE basi EB æqualis; eadem quoque ratione & CF æqualis erit FD. præterea quoniam AD est æqualis CB, & AF ipsi FB, erunt duæ FA AD duabus FB BC æquales, altera al-
d 8. primi. teri; & ostensa est basis DF æqualis basi FC. angulus [d] igitur FAD angulo FBC est æqualis. rursus ostensa est AG æqualis BH, sed & AF ipsi FB est æqualis. duæ igitur FA AG duabus FB BH æquales sunt, & angulus FAG æqualis est angulo FBH; ut demonstratum fuit, basis igitur GF basi FH est [b] æqualis. rursus quoniam GE ostensa est æqualis EH, communis autem EF; erunt duæ GE EF æquales duabus HE EF; & basis HF est æqualis basi FG. angulus [d] igitur GEF angulo HEF est æqualis, & idcirco rectus est uterque angulorum GEF HEF. ergo FE ad GH utcunque per E ductam rectos efficit angulos. similiter ostendemus FE etiam ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt, & in subjecto sunt plano, rectos angulos efficere. recta autem ad
e 3. Def. hujus. planum recta est [e] quando ad omnes rectas lineas ipsam contingentes,

tingentes, & eodem existentes plano rectos efficit angulos. quare F E subjecto plano ad rectos angulos insistit. at subjectum planum est quod per A B C D rectas lineas ducitur. ergo F E ad rectos angulos erit ducto per A B C D plano. Si igitur recta linea duabus rectis lineis se invicem secantibus in communi sectione ad rectos angulos insistat, etiam ducto per ipsas plano ad rectos angulos erit. Quod demonstrare oportebat.

PROP. V. THEOR.

Si recta linea tribus rectis lineis sese tangentibus, in communi sectione, ad rectos angulos insistat, tres illæ rectæ lineæ in uno plano erunt.

Recta linea quædam A B tribus rectis lineis B C B D B E, in contactu B, ad rectos angulos insistat. dico B C B D B E in uno plano esse. Non enim, sed si fieri potest, sint B D B E quidem in subjecto plano; B C vero in sublimi, & planum per A B B C producatur. communem utique sectionem in subjecto plano faciet *a* rectam lineam; faciat B F. in uno igitur sunt plano per A B B C ducto, tres rectæ lineæ A B B C B F. & quoniam A B utrique ipsarum B D B E ad rectos angulos insistit, & ducto per ipsas D B B E plano *b* ad rectos angulos erit. planum autem per D B B E est subjectum planum. ergo A B ad subjectum planum recta est. quare & ad *c* omnes rectas lineas ipsam contingentes, quæ in eodem plano sunt, rectos faciet angulos; sed ipsam tangit B F in subjecto existens plano. ergo angulus A B F rectus est. ponitur autem & A B C angulus rectus. æqualis igitur est angulus A B F angulo A B C, & in eodem sunt plano; quod fieri non potest. recta igitur linea B C non est in sublimi; quare tres rectæ lineæ B C B D B E in uno sunt plano. Si igitur recta linea tribus rectis lineis sese tangentibus, in communi sectione, ad rectos angulos insistat, tres illæ rectæ lineæ in uno plano erunt. Quod demonstrare oportebat.



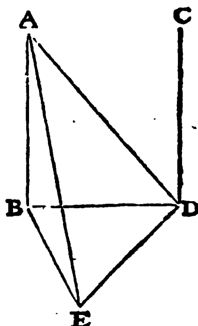
a 3. hujus.
b 4. hujus.
c 3. Def. hujus.

PROP. VI. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint, illæ inter sese parallelæ erunt.

Duæ enim rectæ lineæ A B C D subjecto plano sint ad rectos angulos. dico A B ipsi C D parallelam esse. occurrant

enim subjecto plano in punctis B D, jungaturque B D recta linea, cui ad rectos angulos in subjecto plano ducatur D E, & posita D E ipsi A B æquali, jungantur B E A E A D. Quoniam igitur A B recta est ad subjectum planum, & ad omnes rectas lineas quæ ipsam contingunt, & in subjecto sunt plano, rectos angulos [a] efficiet. contingit autem A B utraque ipsarum B D B E existens in subjecto plano. ergo uterque angulorum A B D A B E rectus est. eadem ratione rectus etiam est uterque ipsorum C D B C D E. & quoniam A B æqualis est ipsi D E, communis autem B D. erunt duæ A B B D duabus E D D B æquales, & rectos angulos continent; basis igitur A D basi B E est [b] æqualis. rursus quoniam A B est æqualis D E, & A D ipsi B E, duæ A B B E duabus E D D A æquales sunt, & basis ipsarum A E communis; ergo angulus A B E angulo E D A est [c] æqualis. sed A B E rectus est. rectus igitur & E D A; & idcirco E D ad D A est perpendicularis. sed & perpendicularis est ad utramque ipsarum B D D C. quare E D tribus rectis lineis B D D A D C in contactu ad rectos insistit angulos. tres igitur rectæ lineæ B D D A D C in uno sunt [d] plano. in quo autem sunt B D D A, in eo est A B, omne enim triangulum in uno [e] est plano. ergo A B B D D C in uno plano sint necesse est; atque est uterque angulorum A B D B D C rectus. parallela igitur [f] est A B ipsi C D. quare si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint, illæ inter se parallelæ erunt. Q. E. D.

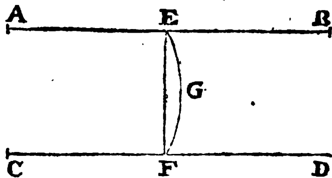


[a] 3. Def. hujus.
[b] 4. primi.
[c] 8. primi.
[d] 5. hujus.
[e] 2. hujus.
[f] 28. primi.

PROP. VII. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ parallelæ sint, sumantur autem in utraque ipsarum quælibet puncta; quæ dicta puncta conjungit recta in eodem erit plano, in quo & parallelæ.

Sint duæ rectæ lineæ parallelæ A B C D, & in utraque ipsarum sumantur quælibet puncta E F. dico rectam lineam quæ puncta E F conjungit, in eodem plano esse, in quo sunt parallelæ. non enim, sed si fieri potest, sit in sublimi, ut E G F, & per E G F, planum ducatur quod in subjecto plano sectionem faciet [a] rectam lineam; faciat ut



[a] 3. hujus.

ut EF. ergo duæ rectæ lineæ EGF EF spatium continebunt, quod fieri non [b] potest. non igitur quæ à puncto E ad F ducitur recta linea in sublimi est plano, quare erit in eo quod per AB CD parallelas transit. Si igitur duæ rectæ lineæ parallelæ sint, &c. Quod oportebat demonstrare.

[b] 10. axio. primi.

PROP. VIII. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ parallelæ sint, altera autem ipsarum plano alicui sit ad rectos angulos, & reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

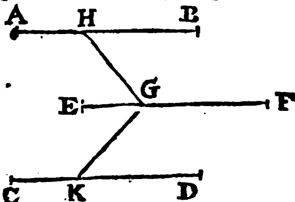
Sint duæ rectæ lineæ parallelæ AB CD, & altera ipsarum AB subjecto plano sit ad rectos angulos. dico & reliquam CD eidem plano ad rectos angulos esse. occurrant enim AB CD subjecto plano in punctis B D, & BD jungatur. ergo AB CD BD in uno sunt [a] plano. ducatur ipsi BD ad rectos angulos in subjecto plano DE: & ponatur DE ipsi AB æqualis: junganturque BE AE AD. & quoniam AB perpendicularis est ad subjectum planum, & ad omnes rectas lineas quæ ipsam contingunt suntque in subjecto plano, perpendicularis [b] erit. rectus igitur est uterque angulorum ABD ABE. quod cum in parallelas rectas lineas AB CD recta incidit BD, erunt anguli ABD CDB duobus rectis [c] æquales. rectus autem est ABD. ergo & CDB est rectus; ac propterea CD perpendicularis est ad BD. & quoniam AB est æqualis DE, communis autem ED, duæ AB BD duabus ED DB æquales sunt; & angalus ABD est æqualis angulo EDB, rectus enim uterque est, basis igitur AD basi BE est [d] æqualis. rursus quoniam AB æqualis est DE, & BE ipsi AD; erunt duæ AB BE duabus ED DA æquales, altera alteri; & basis earum communis AE. quare angulus ABE est [e] æqualis angulo EDA. rectus autem est ABE. ergo & EDA est rectus, & ED ad DA perpendicularis. sed & perpendicularis est ad BD. ergo ED etiam ad planum per BD DA perpendicularis [f] erit, & ad omnes rectas lineas quæ in eodem existentes plano ipsam contingunt, rectos [g] faciet angulos. at in plano per BD DA est DC, quoniam in plano per BD DA sunt [h] AB BD; in quo autem sunt AB BD in eodem [i] est ipsa DC. quare ED ipsi DC est ad rectos angulos: ideoque CD ad rectos angulos est ipsi DE; sed & etiam ipsi DB. ergo CD duabus rectis lineis DE DB se mutuo secantibus in communi sectione D ad rectos angulos insistit; ac propterea plano per DE DB est [e] ad rectos angulos. planum autem per DE DB est subjectum planum. ergo CD subjecto plano ad rectos angulos erit. Quod demonstrare oportebat.

Vide figuram Prop. sextæ.
[a] 7. hujus.
[b] 3. Def. hujus.
[c] 29. primi.
[d] 4. primi.
[e] 8. primi.
[f] 4. hujus.
[g] 3. Def. hujus.
[h] 2. hujus.
[i] 7. hujus.

PROP. IX. THEOR.

Quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, non existentes in eodem in quo ipsa plano, etiam inter se parallelæ erunt.

Sit utraqne ipsarum A B C D parallela ipsi E F, non existentes in eodem, in quo ipsa plano. dico A B ipsi C D parallelam esse. sumatur in E F quodvis punctum G, à quo ipsi E F, in plano quidem per E F A B transeunte, ad rectos angulos ducatur G H; in plano autem transeunti per E F C D, rursus ducatur ipsi E F ad rectos angulos G K. & quoniam E F ad utramque ipsarum G H G K est perpendi-

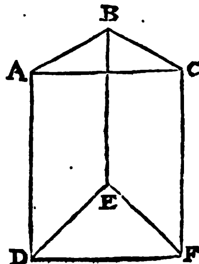


a 4. hujus. cularis, erit E F etiam ad rectos a angulos plano per G H G K transeunte. atque est E F ipsi A B parallela. ergo & A B pla-
b 8. hujus. no per H G K ad rectos angulos b est. eadem ratione & C D plano per H G K est ad rectos angulos. utraque igitur ipsarum A B C D plano per H G K ad rectos angulos erit. Si autem duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fue-
c 6. hujus. rint, parallelæ c erunt inter se. ergo A B ipsi C D est parallela. Quod demonstrare oportebat.

PROP. X. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ sese contingentes, duabus rectis lineis sese contingentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; æquales angulos continebunt.

Duæ rectæ lineæ sese contingentes A B B C, duabus rectis lineis D E E F sese contingentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano. dico angulum A B C angulo D E F æqualem esse. assumantur enim B A B C E D E F inter se æquales; & jungantur A D C F B E E C D F. quoniam igitur B A ipsi
a 33. primi. E D æqualis est & parallela, erit & a A D æqualis & parallela ipsi B E. eadem ratione & C F ipsi B E æqualis & parallela erit. utraque igitur ipsarum A D C F ipsi B E æqualis est & parallela. quæ autem eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, non existentes in eodem plano; & in-



ter

ter se parallelæ [b] erunt. ergo AD parallela est ipsi CF &[b] æqualis. atque ipsas conjungunt AC DF; & AC igitur ipsi DF æqualis est & [c] parallela. & quoniam duæ rectæ lineæ AB BC duabus DE EF æquales sunt, & basis AC est æqualis basi DF; erit [d] angulus ABC angulo DEF æqualis. Si igitur duæ rectæ lineæ sese contingentes, duabus rectis lineis sese contingentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; æquales angulos continebunt. Quod oportebat demonstrare.

b 9. hujus.
c 33. primi.
d 8. primi.

PROP. XI. PROBL.

A dato puncto in sublimi, ad subjectum planum, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit datum quidem punctum in sublimi A, datum autem subjectum planum BH. oportet à puncto A ad subjectum planum perpendicularem rectam lineam ducere. In subjecto plano ducatur quædam recta linea utcunque BC, & à puncto A ad BC perpendicularis agatur [a] AD. siquidem igitur AD perpendicularis sit etiam ad subjectum planum; factum jam erit, quod proponebatur: sin minus; ducatur à puncto D ipsi BC in subjecto plano, ad rectos [b] angulos DE: & a puncto A ad DE perpendicularis [a] ducatur AF. denique per F ducatur GH ipsi BC [c] parallela. Quoniam BC utrique ipsarum DA DE est ad rectos angulos, erit [d] & BD ad rectos angulos plano per DA DE transeunti. quin ipsi BC parallela est GH; si autem sint duæ rectæ lineæ parallelæ, quarum una plano alicui sit ad rectos angulos; & reliqua [e] eidem plano ad rectos angulos erit. quare & GH plano per ED DA transeunti ad rectos angulos est: ac propterea ad omnes rectas lineas, quæ in eodem plano existentes ipsam contingunt est [f] perpendicularis. contingit autem ipsam AF existens in plano per ED DA. ergo GH perpendicularis est ad AF. & ob id AF est perpendicularis ad GH: est autem AF ad DF perpendicularis. ergo AF perpendicularis est ad utramque ipsarum HG DE. si autem recta linea duabus rectis lineis sese contingentibus, in communi sectione, ad rectos angulos insistat, etiam plano per ipsas ducto ad rectos angulos [d] erit. quare AF plano per ED GD ducto est ad rectos angulos. planum autem per ED GH est subjectum planum. ergo AF ad subjectum planum est perpendicularis. A dato igitur puncto sublimi A, ad

a 12. primi.
b 11. primi.
c 31. primi.
d 4. hujus.
e 8. hujus.
f 3. Def. hujus.

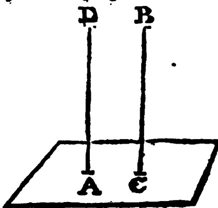
subjectum planum, perpendicularis recta linea ducta est A F. Quod facere oportebat.

PROP. XII. PROBL.

Dato plano, à puncto quod in ipso datum est, ad rectos angulos rectam lineam constituere.

Sit datum quidem planum subjectum, punctum autem quod in ipso sit A. oportet à puncto A subjecto plano ad rectos angulos rectam lineam constituere. Intelligatur aliquod punctum sublime B, à quo ad subjectum planum agatur a perpendicularis B C; & per A ipsi B C parallela b ducatur A D. quoniam igitur duæ rectæ lineæ parallelæ sunt A D C B, una autem ipsarum B C subjecto plano est ad rectos angulos; & reliqua c A D subjecto plano ad rectos angulos erit. Dato igitur plano à puncto quod in ipso est datum, ad rectos angulos recta linea constituta est. Quod facere oportebat.

a 11. hujus.
b 31. primi.
c 8. hujus.

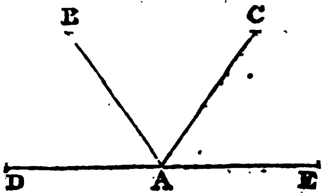


PROP. XIII. THEOR.

Dato plano, à puncto quod in ipso est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non constituentur ex eadem parte.

Si enim fieri potest, dato plano, à puncto quod in ipso est A, duæ rectæ lineæ A B A C ad rectos angulos constituantur ex eadem parte: & ducatur planum per B A A C, quod faciet sectionem per A in subjecto plano a rectam lineam. faciat D A E. ergo rectæ lineæ A B A C D A E in uno sunt plano. & quoniam C A subjecto plano ad rectos angulos est, & ad b omnes rectas lineas, quæ in subjecto plano existentes ipsam contingunt, rectos faciet angulos. contingit autem ipsam D A E, quæ est in subjecto plano. angulus igitur C A E rectus est. eadem ratione & rectus est B A E. ergo angulus C A E ipsi B A E est æqualis. & in uno sunt plano, quod fieri non c potest. Non igitur dato plano, à puncto, quod in ipso est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos constituentur ex eadem parte. Quod oportebat demonstrare.

a 3. hujus.
b 3. Def. hujus.
c 9. axiom. primi.

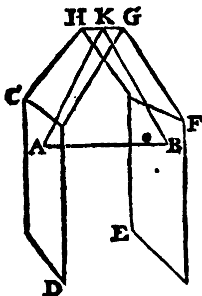


PROP.

PROP. XIV. THEOR.

Ad quæ plana, eadem recta linea est perpendicularis, ea parallela sunt.

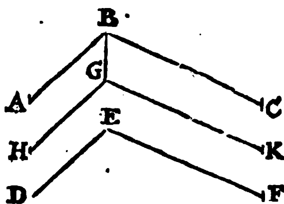
Recta quædam linea A B ad utrumque ipsorum planorum C D E F sit perpendicularis. dico ea plana parallela esse. Si enim non ita sit, producta convenient inter se: conveniant, & communem sectionem faciant rectam lineam G H; & in ipsa G H sumpto quovis puncto K, jungatur A K B K. Quoniam igitur A B perpendicularis est ad E F planum; erit & perpendicularis ad ipsam B K rectam lineam in plano E F producto existentem. quare angulus A B K rectus est. eadem ratione & B A K est rectus: ideoque trianguli A B K duo anguli A B K B A K duobus rectis sunt æquales, quod fieri non ª potest. non igitur plana C D E F producta inter se convenient. quare C D E F parallela sint necesse est. Ad quæ igitur plana, eadem recta linea est perpendicularis, ea parallela sunt. Quod demonstrare oportebat. ª 17. primi.



PROP. XV. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ sese tangentes duabus rectis lineis sese tangentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; & quæ per ipsas transeunt plana parallela erunt.

Duæ rectæ lineæ sese tangentes A B B C, duabus rectis lineis sese tangentibus D E E F parallelæ sint, & non in eodem plano. dico plana quæ per A B B C, D E E F transeunt, si producantur, inter se non convenire. Ducatur à puncto B ad planum, quod per D E E F transit, perpendicularis B G, quæ plano in puncto G occurrat, & per G ducatur ipsi quidem E D parallela G H; ipsi vero E F parallela G K: itaque quoniam B G perpendicularis est ad planum per D E E F; & ad omnes rectas lineas quæ ipsam contingunt, & in eodem sunt plano, rectos faciet ª angulos. contingit autem ipsam utraque earum G H G K, quæ sunt in eodem ª 3. Def. hujus.

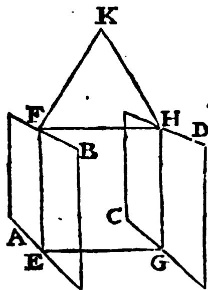


eodem plano. rectus igitur est uterque angulorum B G H B G K. & quoniam B A parallela est ipsi G H, anguli G B A
b 29. primi. B G H duobus rectis sunt *b* æquales. rectus autem est B G H: ergo & G B A rectus erit, ideoque G B ad B A est perpendicularis. eadem ratione & G B est perpendicularis ad B C. cum igitur recta linea B G duabus rectis lineis B A B C se invicem secantibus ad rectos angulos insistat; erit B G etiam
c 4. hujus. ad planum per B A B C ductum *c* perpendicularis. atque est ad planum per D E E F perpendicularis. ergo B G perpendicularis est ad utrumque planorum quæ per A B B C, D E E F transeunt. Ad quæ vero plana eadem recta linea est per-
d 14. hujus. pendicularis, ea parallela *d* sunt. parallelum igitur est planum per A B B C plano per D E E F. Quare si duæ rectæ lineæ sese tangentes duabus rectis lineis sese tangentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano, & quæ per ipsas transeunt plana parallela erunt. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XVI. THEOR.

Si dua plana parallela ab aliquo plano secentur, communes ipsorum sectiones parallelæ erunt.

Duo plana parallela A B C D à plano aliquo E F G H secentur; communes autem ipsorum sectiones sint E F G H. dico E F ipsi G H parallelam esse. Si enim non est parallela, productæ E F G H inter se convenient, vel ad partes F H, vel ad partes E G. producantur prius ad partes F H, & conveniant in K. quoniam igitur E F K est in plano A B, & omnia quæ in E F K sumuntur puncta in eodem plano erunt: unum autem punctorum quæ sunt in E F K, est ipsum K punctum. ergo K est in plano A B. eadem ratione & K est in C D plano. ergo plana A B C D producta inter se convenient. non conveniunt autem, cum parallela ponantur. non igitur E F G H rectæ lineæ productæ convenient ad partes F H. similiter demonstrabimus neque ad partes E G convenire, si producantur. quæ autem neutra ex parte conveniunt parallelæ sunt. ergo E F ipsi G H est parallela. Si igitur duo plana parallela ab aliquo plano secentur, communes ipsorum sectiones parallelæ erunt. Quod demonstrare oportebat.

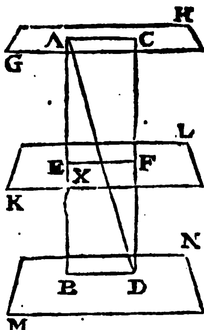


PROP.

PROP. XVII. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ à parallelis secentur planis, in easdem proportiones secabuntur.

Duæ rectæ lineæ AB CD à parallelis planis GH KL MN secentur in punctis A, E, B, C, F, D. dico ut AE recta linea ad ipsam EB, ita esse CF ad FD. Jungantur enim AC BD AD: & occurrat AD plano KL in puncto X: & EX XF jungantur. Quoniam igitur duo plana parallela KL MN à plano EBDX secantur, communes ipsorum sectiones EX BD parallelæ [a] sunt. eadem ratione quoniam duo plana parallela GH KL à plano AXFC secantur, communes ipsorum sectiones AC FX sunt parallelæ. & quoniam uni laterum trianguli ABD, videlicet ipsi BD parallela ducta est EK, ut AE ad EB ita [b] erit AX ad XD. rursus quoniam uni laterum trianguli ADC, nempe ipsi AC parallela ducta est XF, erit ut AX ad XD [b], ita CF ad FD. ostensum autem est ut AX ad XD, ita esse AE ad EB. ut igitur AE ad EB, ita est [c] CF ad FD. Quare si duæ rectæ lineæ à parallelis secentur planis, in easdem proportiones secabuntur. Quod demonstrare oportebat.

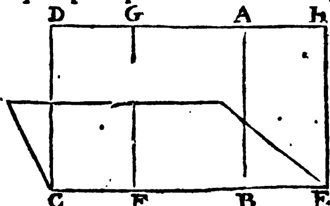


[a] 16. hujus.
[b] 2. sexti.
[c] 11. quinti.

PROP. XVIII. THEOR.

Si recta linea plano alicui sit ad rectos angulos, & omnia quæ per ipsam transeunt plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

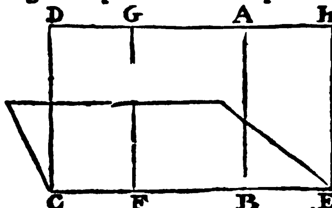
Recta linea quædam AB subjecto plano sit ad rectos angulos. dico & omnia plana quæ per ipsam AB transeunt, subjecto plano ad rectos angulos esse. Producatur enim per AB planum DE, sitque plani DE, & subjecti plani communis sectio CE: & sumatur in CE quodvis punctum F; à quo ipsi CE ad rectos angulos, in DE plano, ducatur FG. quoniam igitur AB ad subjectum planum est perpendicularis; & ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt & in eodem sunt plano perpendicularis [a] erit. quare etiam



[a] 3. Def. hujus.

etiam ad CE est perpendicularis. angulus igitur ABF rectus est: sed & GFB est rectus. ergo AB parallela [b] est ipsi FG. est autem AB subjecto plano ad rectos angulos, & FG igitur eidem plano ad rectos angulos [c] erit. at planum ad planum rectum est, quando communi planorum sectioni ad rectos angulos ductæ rectæ lineæ in uno planorum, reliquo plano ad rectos angulos [d] sunt: communi vero planorum sectioni CE in uno plano DE ad rectos angulos ducta FG, ostensa est subjecto plano ad rectos esse angulos. ergo planum DF rectum est ad subjectum planum. similiter demonstrabuntur & omnia quæ per AB transeunt plana subjecto plano recta esse. Si igitur recta linea plano alicui sit ad rectos angulos, & omnia quæ per ipsam transeunt plana eidem plano ad rectos angulos erunt. Quod oportebat demonstrare.

b 28. primi.
c 8. hujus.
d 4. Def. hujus.

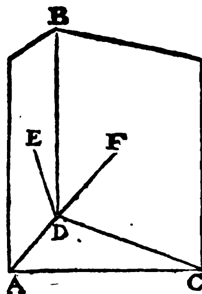


PROP. XIX. THEOR.

Si duo plana se invicem secantia plano alicui sint ad rectos angulos; & communis ipsorum sectio eidem plano ad rectos angulos erit.

Duo plana se invicem secantia AB BC subjecto plano sint ad rectos angulos: communis autem ipsorum sectio sit BD. dico BD subjecto plano ad rectos angulos esse. Non enim, sed si fieri potest; non sit BD ad rectos angulos subjecto plano; & à puncto D ducatur in plano quidem AB, rectæ lineæ AD ad rectos angulos ipsa DE: in plano autem BC ducatur ipsi CD ad rectos angulos DF. Et quoniam planum AB ad subjectum planum rectum est, & communi ipsorum sectioni AD ad rectos angulos in plano AB ducta est DE, erit [a] DE ad subjectum planum perpendicularis. similiter ostendemus & DF perpendicularem esse ad subjectum planum. quare ab eodem puncto D subjecto plano duæ rectæ lineæ ad rectos angulos constitutæ sunt ex eadem parte, quod fieri non [b] potest. non igitur subjecto plano à puncto D ad rectos angulos constituentur aliæ rectæ lineæ, præter ipsam DB, communem planorum

a 4. Def. hujus.
b 13. hujus.



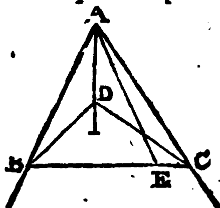
AB BC

AB BC sectionem. quare DB subjecto plano est perpendicularis. Ergo si duo plana se invicem secantia plano alicui sint ad rectos angulos; & communis ipsorum sectio eidem plano ad rectos angulos erit. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XX. THEOR.

Si solidus angulus tribus angulis planis contineatur, duo quilibet reliquo majores sunt, quomodocunque sumpti.

Solidns angulus ad A tribus angulis planis BAC CAD DAB contineatur. dico angulorum BAC CAD DAB duos quoslibet reliquo majores esse, quomodocunque sumptos. Si enim BAC CAD DAB anguli inter se æquales sint, perspicuum est duos quoslibet reliquo majores esse, quomodocunque sumptos. sin minus, sit major BAC. & ad rectam lineam AB, & ad punctum in ipsa A, constituatur [a] angulo DAB, in plano per BA AC transeunte, æqualis angulus BAE; ponaturque ipsi AD æqualis AE; & per E ducta BEC secet rectas lineas AB AC in punctis BC, & DB DC jungantur. itaque quoniam DA est æqualis AE, communis autem AB, duæ DA AB æquales sunt duabus AE AB; & angulus DAB æqualis est angulo BAE. basis igitur DB basi BE est [b] æqualis. & quoniam duæ DB DC ipsi BC majores sunt, quarum DB æqualis ostensa est ipsi BE; erit reliqua DC quam teliqua EC major. quòd cnm DA sit æqualis AE, communis autem AC & basis DC major basi EC; erit [c] angulus DAC angulo EAC major. sed ex constructione est DAB angulus æqualis ipsi BAE. quare DAB DAC anguli, angulo BAC majores sunt. similiter demonstrabimus, & si duo quilibet alii sumantur, eos reliquo esse majores. Si igitur solidus angulus tribus angulis planis contineatur; duo quilibet reliquo majores sunt, quomodocunque sumpti. Quod demonstrare oportebat.



a 23. primi.
b 4. primi.
c 25. primi.

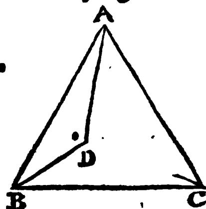
PROP. XXI. THEOR.

Omnis solidus angulus, minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur.

Sit solidus angulus ad A, planis angulis BAC CAD DAB con-

contentus. dico angulos BAC CAD DAB quatuor rectis esse minores. Sumantur enim in unaquaque ipsarum AB BC AD quævis puncta B C D, & BC CD DB jungantur. Quoniam igitur solidus angulus ad B, tribus angulis planis continetur CBA ABD CBD, duo

a 20. hujus. quilibet reliquo majores a sunt: anguli igitur CBA ABD, angulo CBD sunt majores. eadem ratione, & anguli quidem BCA ACD majores sunt



angulo BCD; anguli vero CDA ADB majores angulo CDB. quare sex anguli CBA ABD BCA ACD CDA ADB tribus angulis CBD BCD CDB sunt majores. sed tres anguli CBD

b 32. primi. BDC DCB sunt b æquales duobus rectis. sex igitur anguli CBA ABD BCA ACD CDA ADB duobus rectis majores sunt. quod cum singulorum triangulorum ABC ACD ADB tres anguli sint æquales duobus rectis, erunt trium triangulorum novem anguli CBA ACB BAC ACD DAC CDA ADB DBA BAD æquales sex rectis. quorum sex anguli ABC BCA ACD CDA ADB DBA duobus rectis sunt majores. reliqui igitur BAC CAD DAB tres anguli, qui solidum continent angulum, quatuor rectis minores erunt. Quare omnis solidus angulus, minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXII. THEOR.

Si sint tres anguli plani, quorum duo reliquo sint majores, quomodocunque sumpti, contineant autem ipsos rectæ lineæ æquales; fieri potest, ut ex iis quæ rectas æquales conjungunt, triangulum constituatur.

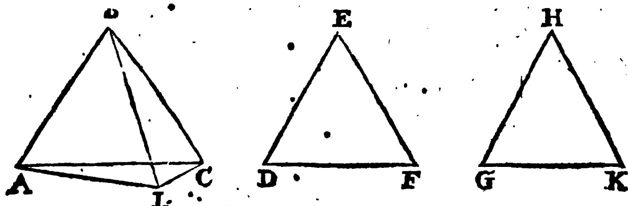
Sint dati tres anguli plani ABC DEF GHK, quorum duo reliquo sint majores, quomodocunque sumpti: contineant autem ipsos æquales rectæ lineæ AB BC, DE EF, GH HK, & AC DF GK jungantur. dico fieri posse ut ex æqualibus ipsis AC DF GK triangulum constituatur: hoc est duas reliqua majores esse quomodocunque sumptas. Si igitur anguli

a 4. primi. ad B E H sint æquales, & AC DF GK æquales a erunt, & duæ reliqua majores. sin minus, sint inæquales anguli ad B E H, & major sit angulus ad B utrovis ipsorum qui sunt

b 24. primi. ad E H. major igitur est & b recta linea AC utravis ipsarum DF GK. & manifestum est ipsam AC unà cum altera ipsarum DF GK, reliqua esse majorem. dico & DF GK ipsa AC

majores

majores esse. constituatur [c] ad rectam lineam A B, & ad punctum in ea B, angulo G H K æqualis angulus A B L, & uni *c 23.primi.*

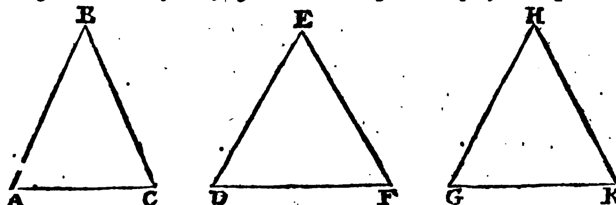


ipsarum A B B C, D E E F, G H H K ponatur æqualis B L, & A L C L jungantur. Quoniam igitur duæ A B B L duabus G H H K æquales sunt, altera alteri, & angulos æquales continent; erit basis A L basi G K æqualis. & quoniam anguli ad E H, angulo A B C majores sunt, quorum angulus G H K est æqualis ipsi A B L; erit reliquus qui ad E, angulo L B C major. quod cum duæ L B B C duabus D E E F æquales sunt, altera alteri; & angulus D E F angulo L B C major; basis D F basi L C major [d] erit. ostensa est autem G K æqualis A L. ergo D F G K ipsis A L L C sunt majores; sed A L L C majores [e] sunt ipsa A C. multo igitur D F G K, ipsa A C majores erunt. quare rectarum linearum A C D F G K duæ reliqua majores sunt, quomodocunque sumptæ; ac propterea [f] fieri potest ut ex æqualibus ipsis A C D F G K triangulum constituatur. Quod oportebat demonstrare. *d 24.primi.* *e 20.primi.* *f 22.primi.*

PROP. XXIII. PROBL.

Ex tribus angulis planis, quorum duo reliquo sunt majores, quomodocunque sumpti, solidum angulum constituere. oportet autem tres angulos quatuor rectis esse minores.

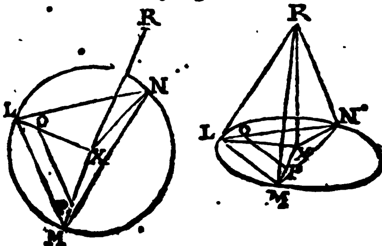
Sint dati tres anguli plano A B C D E F G H K, quorum duo reliquo sint majores, quomodocunque sumpti, sintque tres



anguli quatuor rectis minores. oportet ex æqualibus ipsis A B C D E F G H K solidum angulum constituere. abscindantur æquales A B B C, D E E F, G H H K; & A C D F G K jungantur.

fieri

fieri igitur potest ut ex æqualibus ipsis AC DF GK constituatur [a] triangulum. Itaque [b] constituatur LMN, ita ut AC quidem sit æqualis LM, DF vero ipsi MN: & præterea GK ipsi LN, & circa LMN triangulum circulus LMN [c] describatur: sumaturque ipsius centrum X, quod vel erit intra triangulum LMN, vel in uno ejus latere, vel extra. sit primo intra: & LX MX NX jungantur. dico AB majorem esse ipsa LX. si enim non ita sit, vel AB erit æqualis LX; vel ea minor. sit primo æqualis. quoniam igitur AB est æqualis LX, atque est AB ipsi BC æqualis; erit LX æqualis BC, est autem LX æqualis XM. duæ igitur AB BC duabus LX XM æquales sunt, altera alteri; & AC basis basi LM æqualis ponitur. quare [d] angulus ABC angulo LXM est æqualis: eadem ratione & angulus quidem DEF est æqualis angulo MXN, angulus vero GHK angulo NXL. tres igitur anguli ABC DEF GHK tribus LXM MXN NXL æquales sunt. sed tres LXM MXN NXL quatuor rectis sunt [e] æquales. ergo & tres ABC DEF GHK æquales erunt quatuor rectis. atqui ponuntur quatuor rectis minores, quod est absurdum. non igitur AB ipsi LX est æqualis. dico præterea neque AB minorem esse ipsa LX. si enim fieri potest, sit minor, & ponatur ipsi quidem AB æqualis XO, ipsi vero BC æqualis XP, & OP jungatur. quoniam ig tur AB est æqualis BC, & XO ipsi XP æqualis erit. ergo & reliqua OL reliquæ PM est æqualis; ac propterea LM parallela [f] est ipsi OP; & LMX triangulum triangulo OPX æquiangulum. est [g] igitur ut XL ad LM, ita XO ad OP; & permutando ut XL ad XO, ita LM ad OP. major autem est LX, quam XO. ergo & LM quam OP est major. sed LM posita est æqualis AC. & AC igitur quam OP major erit. itaque quoniam duæ rectæ lineæ AB BC duabus OX XP æquales sunt, & basis AC major basi OP; erit [h] angulus ABC angulo OXP major. similiter demonstrabimus & DEF angulum majorem esse angnlo MXN, & angulum GHK angulo NXL; tres igitur anguli ABC DEF GHK tribus LXM MXN NXL sunt majores. at anguli ABC DEF GHK quatuor rectis minores ponuntur. multo igitur anguli LXM MXN NXL minores erunt quatuor rectis. sed & [i] æquales. quod est absurdum. non igitur AB minor est, quam



a 22. hujus.
b 22. primi.
c 5. quarti.
d 8. primi.
e 2. Cor. 15. primi.
f 2. sexti.
g 4. sexti.
h 25. primi.
i 2. Cor. 15. primi.

L X. ostensum autem est neque esse æqualem. ergo major sit necesse est. constituatur *k* à puncto X circuli L M N plano ad rectos angulos X R. & excessui quo quadratum ex A B superat quadratum ex L X, ponatur æquale quadratum quod sit ex R X, & R L R M R N jungantur. quoniam igitur R X perpendicularis est ad planum D M N circuli, & ad unamquamque ipsarum L X. M X N X erit *l* perpendicularis. & quoniam L X est æqualis X M, communis autem & ad rectos angulos X R, erit basis L R æqualis *m* basi R M. eadem ratione & R N utrique ipsarum R L R M est æqualis. tres igitur rectæ lineæ R L R M R N inter se æquales sunt. & quoniam quadratum X R ponitur æquale excessui, quo quadratum ex A B superat quadratum ex L X; erit quadratum ex A B quadratis ex L X X R æquale. quadratis autem ex L X X R æquale est *n* quadratum ex R L; rectus enim angulus est L X R. ergo quadratum ex A B quadratum ex R L æquale erit; ideoque A B ipsi R L est æqualis. sed ipsi quidem A B æqualis est unaquæque ipsarum B C D E E F G H H K: ipsi vero R L æqualis utraque ipsarum R M R N. unaquæque igitur ipsarum A B B C D E E F G H H K unicuique ipsarum R L R M R N est æqualis. quod cum duæ R L R M duabus A B B C æquales sint, & basis L M ponatur æqualis basi A C: erit *o* angulus L R M æqualis angulo A B C. eadem ratione & angulus quidem M R N angulo D E F, angulus autem L R N angulo G H K est æqualis. ex tribus igitur angulis planis L R M M R N L R N, qui æquales sunt tribus datis A B C D E F G H K solidus angulus constitutus est ad R.

k 12. hujus.

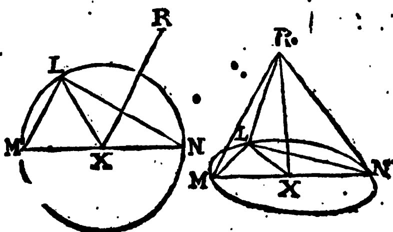
l 3. Def. hujus.

m 4. primi.

n 47. primi.

o 8. primi.

Sed sit centrum circuli in uno laterum trianguli, videlicet in M N, quod sit X, & X L jungatur. dico rursus A B majorem esse ipsa L X. si enim non ita sit, vel A B est æqualis L X vel ipsa minor. sit primo æqualis. duæ igitur A B B C, hoc est D E E F duabus M X X L, hoc est ipsi M N æquales sunt. sed M N ponitur æqualis D F.



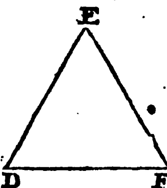
ergo D E E F ipsi D F sunt æquales. quod fieri non *p* potest. non igitur A B est æqualis L X. similiter neque minor. multo enim magis id quod fieri non potest sequeretur. ergo A B ipsa L X major est. & similiter si excessui quo quadratum ex A B superat quadratum ex L X æquale ponatur quadratum

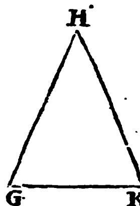
p 20 primi.

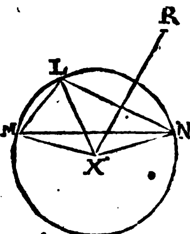
ex R X, & ipsa R X circuli plano ad rectos angulos constituatur, fiet problema.

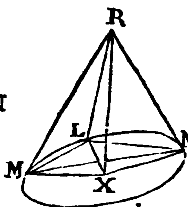
Sed sit centrum circuli extra triangulum L M N, quod sit X, & L X M X N X jungantur. dico & sic A B ipsa L X majorem esse. Si enim non ita sit, vel æqualis est, vel minor. sit primo æqualis. ergo duæ A B B C duabus M X X L æquales sunt, altera alteri; & basis A C est æqualis basi M L, angulus igitur A B C æqualis est angulo M X L. eadem ratione & G H K angulus ipsi L X N est æqualis; ac propterea totus M X N æqualis duobus A B C G H K. sed & anguli A B C G H K angulo D E F majores sunt. & angulus igitur M X N ipso D E F est major. at quoniam duæ D E E F duabus M X X N æquales sunt, & basis D F æqualis basi M N, erit M X N angulus angulo D E F æqualis. ostensus autem est major, quod est absurdum. non igitur A B est æqualis L X; deinceps vero ostendemus neque minorem esse. quare major necessario erit. & si rursus circuli plano ad rectos angulos constituamus X R, & ipsam æqualem ponamus lateri quadrati ejus, quo quadratum ex A B superat quadratum ex L X, problema constituetur. Dico vero neque minorem esse A B ipsa L X. si enim fieri potest, sit minor; & ipsi quidem A B æqualis ponatur X O, ipsi vero B C æqualis X P, & O P jungatur. quoniam igitur A B ipsi B C est æqualis, erit O X æqualis X P. ergo & reliqua O L reliquæ P M æqualis. parallela igitur q est L M ipsi P O, & triangulum L M X triangulo P X O æquiangulum est. quare r ut X L ad L M, ita X O ad O P: & permutando ut L X ad X O ita L M ad O P. major autem est L X quam X O. ergo L M quam O P est major. sed L M est æqualis A C. & A C igitur quam O P major erit

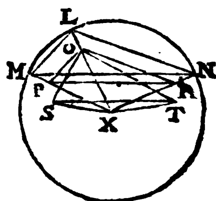












q 2. sexti.
r 4. sexti.

rit. itaque quoniam duæ AB BC duabus OX XP sunt æquales altera alteri; & basis AC major est basi OP; erit *f* angulus ABC angulo OXP major. similiter & si XR sumatur æqualis utrivis ipsarum XO XP, & jungatur OR, ostendemus angulum GHK angulo OXR majorem. constituatur ad rectam lineam LX, & punctum in ipsa X angulo quidem ABC æqualis angulus LXS, angulo autem GHK æqualis LXT, & ponatur utraque XS XT ipsi OX æqualis: junganturque OS OT ST. & quoniam duæ AB BC duabus OX XS æquales sunt, & angulus ABC æqualis angulo OXS erit basis AC, hoc est LM, basi OS æqualis. eadem ratione, & LN est æqualis ipsi OT. quod cum duæ ML LN duabus OS OT sint æquales, & angulus MLN major angulo SOT; erit & basis MN basi ST major. sed MN est æqualis DF. ergo & DF quam ST major erit. quoniam igitur duæ DE EF duabus SX XT æquales sunt, & basis DF major basi ST; erit angulus DEF angulo SXT major. æqualis autem est angulus SXT angulis ABC GHK. ergo DEF angulus angulis ABC GHK major est: sed & minor. Quod fieri non potest. Quod demonstrare oportebat.

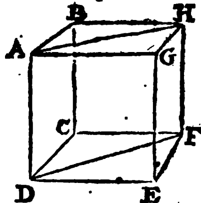
f 25. primi.

PROP. XXIV. THEOR.

Si solidum parallelis planis contineatur, opposita ipsius plana, & æqualia, & parallelogramma erunt.

Solidum enim CDGH parallelis planis AC GF BG CE FB AE contineatur. dico opposita ejus plana, & æqualia, & parallelogramma esse. Quoniam enim duo plana parallela BG CE, à plano AC secantur, communes ipsorum sectiones *a* parallelæ sunt: ergo AB ipsi CD est parallela. rursus quoniam duo plana parallela BF AE secantur à plano AC, communes ipsorum sectiones parallelæ *a* sunt: parallela igitur est AD ipsi BC. ostensa autem est & AB parallela CD. ergo AC parallelogrammum erit. similiter demonstrabimus, & unumquodque ipsorum CE FG GB BF AE parallelogrammum esse. jungantur AH DF. & quoniam parallela est AB quidem ipsi DC; BH vero ipsi CF, erunt AB BH sese tangentes, duabus DC CB sese tangentibus parallelæ, & non in eodem plano: quare æquales *b* angulos continebunt. angulus igitur ABH angulo DCF est æqualis. Et quoniam duæ AB BH duabus DC CF æquales *c* sunt, & angulus

a 16. hujus.



b 10. hujus.

c 34. primi.

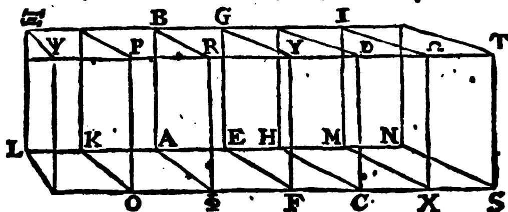
d 4. primi. angulus ABG æqualis angulo DCF, erit d basis AH basi DF æqualis; & ABH triangulum æquale triangulo DCF. quod
e 41. primi. cum ipsius quidem ABH trianguli duplum e sit BG parallelogrammum: ipsius vero DCF trianguli duplum parallelogrammum CE: erit BG parallelogrammum æquale parallelogrammo CE. similiter demonstrabimus & AC parallelogrammum parallelogrammo GF, & parallelogrammum AE parallelogrammo BF æquale esse.. Si igitur solidum parallelis planis contineatur, opposita ipsius plana, & æqualia, & parallelogramma sunt. Quod oportebat demonstrare.

Cor. Ex jam demonstratis constat, si solidnm parallelis contineatur planis, opposita ipsius plana, & æqualia esse, & similia, quippe quæ & singulos angulos æquales, & circa æquales angulos laterea proportionalia habeant.

PROP. XXV. THEOR.

Si solidum parallelepipedum plano secetur oppositis planis parallelo, erit ut basis ad basim, ita solidum ad solidum.

Solidum enim parallelepipedum ABCD plano YE secetur, oppositis planis RA DH parallelo. dico ut EFΦA basis ad basim EHCF, ita esse ABFY solidum ad solidum EGCD. Producatur enim AH ex utraque parte:. & ponantur ipsi



quidem EH æquales quotcunque HM MN; ipsi vero AE æquales quotcunque AK KL, & compleantur parallelogramma LO KΦ HX MS, & solida LP KR HΩ MT. quoniam igitur æquales inter se sunt LK KA AE rectæ lineæ;
a 1. sexti. erunt & parallelogramma LO KΦ AF inter se a æqualia: itemque æqualia inter se parallelogramma KE KB AG, & adhuc
b 24. hujus. parallelogramma LY KP AR inter se b æqualia; opposita enim sunt. eadem ratione & parallelogramma EC HX MS æqualia inter se sunt; itemque parallelogramma HG HI IN inter se æqualia: & insuper parallelogramma DH MΩ NT: tria igitur plana solidi LP æqualia sunt tribus planis solidi
c 29. primi. KR, atque etiam solidi AY, c similia quoque sunt: sed tria

tribus

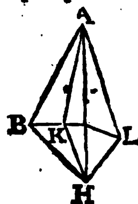
tribus oppositis [d] sunt similia & æqualia. ergo tria solida L P K R A Y inter se æqualia [e] erunt. eadem ratione & tria solida E D H Ω M T sunt æqualia inter se. quotuplex igitur est basis L F ipsius A F basis, totuplex est & L Y solidum solidi A Y. eadem ratione quotuplex est N F basis ipsius basis H F, totuplex est & solidum N Y ipsius E D solidi: & si basis L F est æqualis basi N F, & solidum L Y solido N Y æquale erit; & si basis L F superat N F basim, & L Y solidum N Y superabit; & si minor, minus. quatuor igitur magnitudinibus existentibus, duabus scilicet basibus A F F H, & duobus solidis A Y E D; sumpta sunt æque multiplicia, basis quidem A F, & A Y solidi, videlicet basis L F, & solidum L Y: basis vero H F, & E D solidi, nempe basis N F, & solidum N Y. & demonstratum est si basis L F superat basim N F, & L Y solidum solidum N T superare; & si æqualis æquale; & si minor minus. est igitur [f] ut A F basis ad basim F H, ita A Y solidum ad solidum E D. Quare si solidum parallelepipedum plano secetur, oppositis planis parallelo; erit ut basis ad basim, ita solidum ad solidum. Quod oportebat demonstrare.

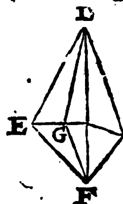
d Cor. antecedent.
e 10. Def. hujus.
f 5. Def. quinti.

PROP. XXVI. PROBL:

Ad datum rectam lineam, & ad datum in ipsa punctum dato angulo solido æqualem solidum angulum constituere.

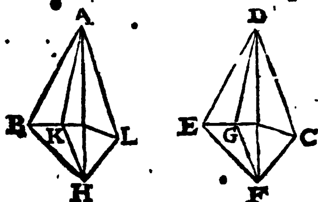
Sit data quidem recta linea A B, datum autem in ipsa punctum A, & datus solidus angulus ad D qui E D C E D F F D C angulis planis continetur. oportet ad datam rectam lineam A B, & ad datum in ipsa punctum A, dato angulo solido ad D æqualem solidum angulum constituere. Sumatur in linea D F quodvis punctum F, à quo ad planum per E D D C transiens ducatur [a] perpendicularis E G, & plano in puncto G occurrat; jungaturque D G, & ad rectam lineam A B, & ad datum in ipsa punctum A, angulo quidem E D C æqualis angulus [b] constituatur B A L; angulo autem E D G constituatur æqualis B A K. deinde ipsi D G ponatur æqualis A K, & à puncto K plano per B A L ad rectos angulos [c] erigatur H K; ponaturque ipsi G F æqualis K H; & H A jungatur. dico angulum solidum ad A qui angulis B A L B A H H A L, continetur, æqualem esse solido angulo ad D, angulis E D C E D F F D C contento. sumantur





a 11. hujus.
b 23. primi.
c 12. hujus.

mantur enim æquales rectæ lineæ A B D E, & jungantur H B K B F E G E. quoniam igitur F G perpendicularis est ad subjectum planum, & ad omnes rectas lineas quæ ipsam contingunt, suntque in subjecto plano, rectos faciet [d] angulos. uterque igitur angulorum F G D F G E rectus est. eadem ratione, & uterque ipsorum H K A H K B est rectus. & quoniam duæ K A A B duabus G D D E æquales sunt altera alteri, & angulos æquales continent; erit [e] basis B K basi E G æqualis. est autem & K H æqualis G F, atque angulos rectos continent. æqualis [e] igitur erit H B ipsi F E. rursus quoniam duæ A K K H duabus D G G F æquales sunt, & rectos continent angulos; erit basis A H basi D F æqualis: estque A B æqualis D E. duæ igitur H A A B duabus F D D E sunt æquales; & basis H B est æqualis basi F E, ergo angulus [f] B A H angulo E D F æqualis erit. eadem ratione, & angulus H A L anguo F D C est æqualis, quandoquidem si assumamus æquales A L D C, & jungamus K L H L G C F C, quoniam totus B A L est æqualis toti E D C, quorum B A K ipsi E D G ponitur æqualis; erit reliquus K A L æqualis reliquo G D C. & quoniam duæ K A A L duabus G D D C æquales sunt, & angulos æquales continent; basis K L basi G C [e] æqualis erit. est autem & K H æqualis G F, duæ igitur L K K H, duabus C G G F sunt æquales; angulosque rectos continent: ergo basis H L æqualis est basi F C. rursus quoniam duæ H A A L, duabus F D D C æquales sunt, & basis H L æqualis basi F C; erit angulus H A L [f] æqualis angulo F D C. atque factus est angulus B A L angulo E D C æqualis. Ad datam igitur rectam lineam, & ad datum in ipsa punctum, dato angulo solido æqualis angulus solidus constitutus est. Quod facere oportebat.



d 3. Def. hujus.

e 4. primi.

f 8. primi.

PROP. XXVII. PROBL.

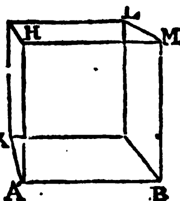
Ad datam rectam lineam dato solido parallelepipedo simile, & similiter positum solidum parallelepipedum describere.

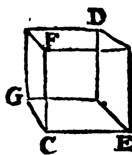
Sit recta quidem linea A B; datum vero solidum parallelepipedum C D. oportet ad datam rectam lineam A B dato solido parallelipedo C D simile, & similiter positum solidum parallelepipedum describere. Constituatur ad rectam lineam A B,

&

& ad datum in ipsa punctum A angulo solido ad C æqualis [a] angulus, qui angulis BAH HAK KAB contineatur, ita ut angulus quidem BAH æqualis sit angulo ECF, angulus vero BAK angulo ECG, & adhuc angulus HAK angulo GCF, & fiat [b] ut EC ad CG, ita BA ad AK, ut autem GC ad CF, ita KA ad AH. ergo ex æquali ut EC ad CF, ita erit BA ad AH. compleatur parallelogrammum BH, & AL solidum. quoniam igitur est ut EC ad CG, ita BA ad AK, nempe, circa æquales angulos ECG BAK latera sunt proportionalia; erit parallelogrammum KB parallelogrammo GE simile. eadem quoque ratione parallelogrammum KH simile est parallelogrammo GF, & parallelogrammum HB parallelogrammo FE. tria igitur parallelogramma solidi AL tribus parallelogrammis solidi CD similia sunt: sed tria tribus oppositis sunt [c] æqualia, & similia. ergo totum AL solidum toti solido CD simile erit. Ad datam igitur rectam lineam AB dato solido parallelipipedo CD simile, & similiter positum solidum parallelipipedum AL descriptum est. Quod facere oportebat.

[a] 26. hujus.
[b] 12. sexti.
[c] Cor. 24. hujus.





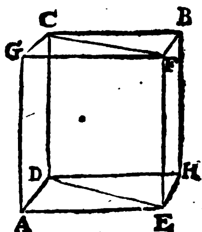
PROP. XXVIII. THEOR.

Si solidum parallelepipedum plano secetur per diagonales oppositorum planorum, ab ipso plano bifariam secabitur.

Solidum enim parallelepipedum AB plano CDEF secetur per diagonales oppositorum planorum, videlicet CF DE. dico solidum AB à plano CDEF bifariam secari.

Quoniam enim æquale [a] est CGF triangulum triangulo CBF, triangulum vero ADE triangulo DEH; est autem & CA parallelogrammum parallelogrammo BE æquale [b], oppositum enim est; & parallelogrammum GE æquale parallelogrammo CH; erit prisma contentum duobus triangulis CGF ADE, & tribus parallelogrammis GE AC CE æquale prismati, quod continetur duobus triangulis CFB DEF, & tribus parallelogrammis CH & BE CE: etenim planis, & numero & magnitudine æqualibus continentur. ergo totum AB solidum

[a] 34. primi.
[b] 24. hujus.

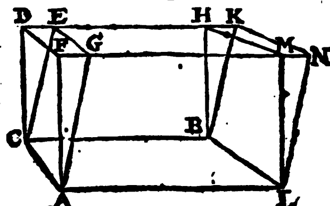


dum à plano CDEF bifariam secatur. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXIX. THEOR.

Solida parallelepipeda quæ in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes lineæ sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia.

Sint enim in eadem basi AB solida parallelipipeda CM CN, eadem altitudine, quorum stantes AF AG LM LN CD CE BH BK sint in eisdem rectis lineis FN DK. dico solidum CM solido CN æquale esse. Quoniam enim parallelogrammum est utrumque ipsorum CH CK; erit CB,



a 34. primi. utrique ipsarum DH EK [a] æqualia, ergo & DH est æqualis EK. communis auferatur EH. reliqua igitur DE æ-
b 8. primi. qualis est reliquæ HK. quare & [b] DEC triangulum est æquale triangulo HKB. parallelogrammum autem DG est æquale parallelogrammo HN. eadem ratione & AFG triangulum æquale est triangulo LMN. est autem parallelogrammum
c 24. hujus. CF parallelogrammo [c] BM, & parallelogrammum CG parallelogrammo BN æquale: opposita enim sunt. ergo & prisma contentum duobus triangulis AFG DEC, & tribus parallelogrammis AD DG GC est æquale prismati, quod duobus triangulis LMN HBK, & tribus parallelogrammis BM NH BN continetur. commune apponatur solidum, cujus basis quidem parallelogrammum AB, oppositum autem ipsi GEHM. ergo totum CM solidum parallelepidedum toti solido parallelepipedo CN est æquale. Solida igitur parallelepipeda quæ in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia. Quod demonstrare oportebat.

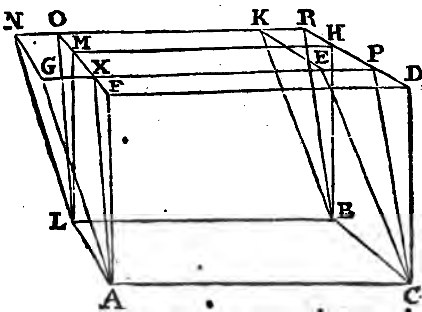
PROP. XXX. THEOR.

Solida parallelepipeda quæ in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in iisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia.

Sint in eadem basi AB solida parallelepipeda CM CN & eadem altitudine, quorum stantes AF AG LM LN CD CE

BH

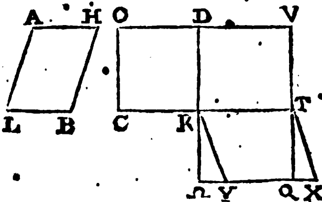
BH BK non sint in eisdem rectis lineis. dico solidum CM solido CN æquale esse. producantur enim NK DK, & GE FM, conveniantque inter se punctis E X; & adhuc producantur FM GE ad O P puncta: & AX LO CP BR jungantur. solidum CM, cujus basis quidem ACBL parallelogrammum, oppositum autem ipsi FDHM est ᵃ æquale solido CO, cujus basis parallelogrammum ACBL & ei oppositum XPRO, in eadem enim sunt basi ACBL, & ipsorum stantes AF AX LM LO CD CP BH BR sunt in eisdem rectis lineis FO DR. sed solidum CO, cujus basis quidem parallelogrammum ABCL, oppositum autem ipsi XPRO est ᵃ æquale solido CN, cujus basis BCBL parallelogrammum, & ipsi oppositum GEKN. etenim in eadem sunt basi ACBL, & eorum stantes AG AX CE CP LN LO BK BR sunt in eisdem rectis lineis GP NR. quare & CM solidum solido CN æquale erit. Solida igitur parallelepipeda quæ in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia. Quod demonstrare oportebat. ᵃ 29. hujus.



PROP. XXXI. THEOR.

Solida parallelepipeda quæ in æqualibus sunt basibus, & eadem altitudine, inter se sunt æqualia.

Sint in æqualibus basibus AB CD solida parallelepipeda AE CF, & eadem altitudine. dico solidum AE solido CF æquale esse. sint primo stantes HK BE AG LM OP DF CZ RS ad rectos angulos basibus AB CD: angulus autem ALB angulo CRD sit inæqualis, & producatur ipsi CR in directum RT: constituaturque ad rectam lineam RT, & ad punctum in ipsa R, angulo ALB æqualis ᵃ angulus TRY. & ponatur ipsi quidem AL æqualis ᵃ 23. primi.

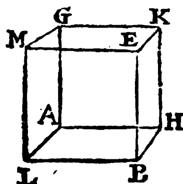


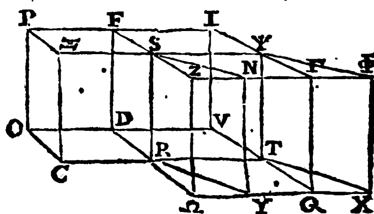
RT,

RT, ipsi vero LB æqualis RY, & ad punctum Y ipsi RT parallela ducatur YX, compleaturque parallelogrammum RX, & ΨY solidum. quoniam igitur duæ TR RY duabus AL LB æquales sunt, & angulos continent æquales; erit parallelogrammum RX æquale & simile parallelogrammo HL: & quoniam rursus AL est æqualis RT, & LM ipsi RS, angulosque æquales continent, parallelogrammum RΨ parallelogrammo AM æquale & simile erit. eadem ratione LE parallelogrammum ipsi SY æquale est & simile. tria igitur parallelogramma solidi AE tribus parallelogrammis solidi ΨY æqualia & similia sunt. sed & tria tribus opposita & [b] æqualia sunt & similia. totum igitur AE solidum parallelepipedum toti solido parallelepipedo ΨY est æquale. producantur DR XY, conveniantque inter se in puncto Ω, & per T ipsi DΩ parallela ducatur TQ, & producantur TQ OD, & conveniant in V, compleaturque solida ΩΨ RI. solidum igitur ΨΩ cujus basis est RΨ parallelogrammum, oppositum autem ipsi ΩΓ, est [c] æquale solido ΨY, cujus basis est RΨ parallelogrammum, & oppositum ipsi YΦ, in eadem enim

b Cor. 24. hujus.

c 29. hujus.

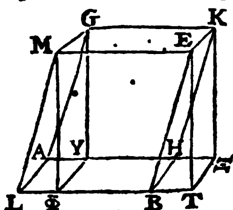


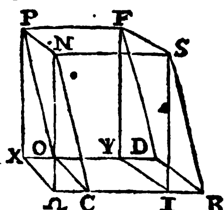


sunt basi RΨ, & eadem altitudine, & eorum stantes RΩ RY TQ TX SZ SN ΨΓ ΨΦ in eisdem sunt rectis lineis ΩX ZΦ. sed solidum ΨY æquale est solido AE. ergo & ΨΩ solido AE est æquale. præterea quoniam parallelogrammum RYXT est æquale parallelogrammo ΩT, etenim in eadem est basi RT, & in eisdem parallelis RT ΩX. & parallelogrammum RYXT parallelogrammo CD est æquale, quoniam & ipsi AB est æquale; parallelogrammum ΩT æquale est parallelogrammo CD: aliud autem est parallelogrammum DT. est igitur ut CD basis ad basim DT, ita ΩT ad ipsam DT. & quoniam solidum parallelepipedum CI secatur plano RF planis oppositis parallelo; erit ut [d] CD basis ad basim DT, ita solidum CF ad RI solidum. eadem ratione quoniam solidum parallelepipedum ΩI secatur plano RΨ oppositis planis parallelo, ut ΩT basis ad basim DT, ita erit solidum ΩΨ & RI solidum. sed ut CD basis ad basim DT, ita basis ΩT ad ipsam TD. ut igitur solidum CF ad RI solidum ita solidum

d 25. hujus.

ſolidum ΩΨ ad ſolidum R I. quod cum utrumque ſolidorum C F ΩΨ ad ſolidum R I eandem habet proportionem, ſolidum C F ſolido ΩΨ eſt æquale. ſolidum autem ΩΨ oſtenſum eſt æquale ſolido A E. ergo & [e] A E ipſi C F æquale erit. [e] 9. quinti.



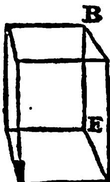


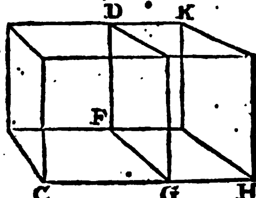
Sed non ſint ſtantes A G HK BE LM CN OP DF RS ad rectos angulos ipſis A B C D baſibus. dico rurſus ſolidum A E æquale eſſe ſolido C F. ducantur [f] à punctis K E G M, P F N S [f] 11. hujus. ad ſubjectum planum perpendiculares K Ξ E T G Y M Φ, S I F Ψ N Ω P K, & plano in punctis Ξ T Y Φ, Ψ X Ω I occurrant, & jungantur Ξ T Y Φ Ξ Y T Φ X Ψ X Ω Ω I Ψ I. æquale igitur eſt K Φ ſolidum ſolido P I; in æqualibus enim ſunt baſibus K M P S, & eadem altitudine, quorum ſtantes ad rectos angulos ſunt baſibus. ſed K Φ ſolidum ſolido A E eſt [g] æquale: ſolidum vero P I æquale [g] ſolido C F. ſi quidem [g] 29. hujus. in eadem ſunt baſi, & eadem altitudine, quorum ſtantes non ſunt in eiſdem rectis lineis. ergo & ſolidum A E ſolido C F æquale erit. Solida igitur parallelepipeda quæ in æqualibus ſunt baſibus & eadem altitudine, inter ſe ſunt æqualia. Quod demonſtrare oportebat.

PROP. XXXII. THEOR.

Solida parallelepipeda quæ eandem habent altitudinem, inter ſe ſunt ut baſes.

Sint ſolida parallelepipeda A B C D, quæ eandem altitudinem habeant. dico inter ſe eſſe ut baſes; hoc eſt ut A E baſis ad baſim C F ita ſolidum A B ad C D ſolidum. applicetur enim ad rectam lineam F G parallelogrammo A E æquale F H, & à baſi F H eadem





altitudine ipſi C D ſolidum parallelepipedum G K compleatur. ſolidum igitur A B ſolido G K eſt [a] æquale; in æqualibus [a] 31. hujus. enim

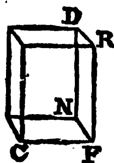
enim sunt basibus A E F H, & eadem altitudine. itaque quoniam solidum parallelepipedum C K plano D G secatur oppositis planis parallelo; erit ut [b] H F basis ad basim F C, ita solidum H D ad D C solidum; atque est basis quidem F H basi A E æqualis, solidum vero G K æquale solido A B. est igitur & ut A E basis ad basim C F, ita solidum A B ad solidum C D. Quare solida parallelepipeda quæ eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases. Quod demonstrare oportebat.

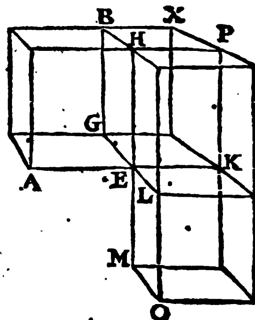
b 25. hujus.

PROP. XXXIII. THEOR.

Similia solida paralleleppipeda inter se sunt in triplicata proportione homologorum laterum.

Sint similia solida parallelepipeda A B C D. latus autem A E homologum sit lateri C F. Dico solidum A B ad C D solidum triplicatam proportionem habere ejus, quam habet A E ad C F. producantur enim E K. E L E M in directum ipsis A E G E H E: & ipsi quidem C F æqualis ponatur E K, ipsi vero F N æqualis E L; & adhuc ipsi F R æqualis E M, & K L parallelogrammum, & K O solidum compleatur. quoniam igitur duæ K E E L duabus C F F N æquales sunt: sed & angulus K E L angulo C F N est æqualis; quia & angulus A E G ipsi C F N ob similitudinem solidorum A B C D: erit & K L parallelogrammum simile & æquale parallelogrammo C N. eadem ratione, & parallelogrammum K M æquale est & simile parallelogrammo C R, & adhuc parallelogrammum O E ipsi D F parallelogrammo. tria igitur parallelogramma solidi K O tribus parallelogrammis C D solidi æqualia & similia sunt. sed tria tribus oppositis æqualia [a] sunt & similia. totum igitur K O solidum æquale est & simile toti solido C D. compleatur G K parallelogrammum; & à basibus quidem G K K L parallelogrammis, altitudine vero eadem ipsi A B, solida compleantur E X L P. & quoniam ob similitudinem solidorum A B C D est ut A E ad C F, ita E G ad F N; & E H ad F R: æqualis autem F C ipsi E K, & F N ipsi E L, &





a Cor. 24. hujus.

F R

FR ipsi EM. erit ut AE ad EK, ita GE ad EL, & HE ad EM. sed ut AE quidem ad EK, [b] ita AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK: ut autem GE ad EL, ita GK ad KL: & ut [b] HE ad EM, ita PE ad KM. & ut igitur AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK, ita GH ad KL, & PE ad KM. sed ut AG quidem ad GK, ita [c] AB solidum ad solidum EX: ut autem GK ad KL, ita solidum EX ad PL solidum: & ut PE ad KM, ita PL solidum ad solidum KO. & ut igitur solidum AB ad solidum EX, ita [d] EX ad PL, & PL ad KO. si autem quatuor sint magnitudines deinceps proportionales, prima ad quartam triplicatam proportionem [e] habet ejus, quam habet ad secundam. ergo & AB solidum ad solidum KO triplicatam habet proportionem ejus, quam AB ad EX. sed ut AB ad EX, ita AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK; & AE recta linea ad ipsam EK. quare & AB solidum ad solidum KO triplicatam proportionem habebit ejus, quam AE habet ad EK. æquale autem est solidum KO solido CD, & recta linea EK rectæ CF est æqualis. ergo & AB solidum ad solidum CD triplicatam habet proportionem ejus, quam latus ipsius homologum AE habet ad CF homologum latus. Quod demonstrare oportebat.

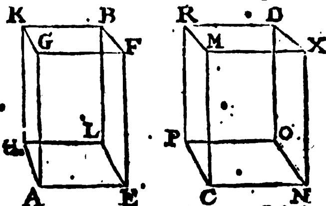
[b] 1. sexti.
[c] 32. hujus.
[d] 11. quinti.
[e] 11. Def. quinti.

Cor. Ex hoc manifestum est, si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad quartam, ita esse solidum parallelepipedum quod fit à prima ad solidum quod à secunda, simile, & similiter descriptum; quoniam & prima ad quartam triplicatam proportionem habet ejus, quam habet ad secundam.

PROP. XXXIV. THEOR.

Æqualium solidorum parallelepipedorum reciprocantur bases & altitudines; & quorum solidorum parallelepipedorum reciprocantur bases & altitudines, ea inter se sunt æqualia.

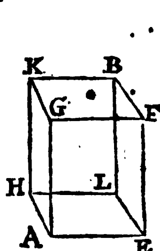
Sint æqualia solida parallelepipeda AB CD. dico ipsorum bases & altitudines reciprocari, hoc est ut EH basis ad basim NP, ita esse altitudinem solidi CD ad solidi AB altitudinem. Sint enim primo stantes AG EF LB HK CM NX OD PR ad rectos angulos basibus ipsorum.

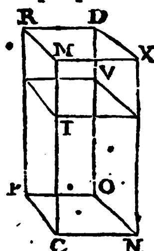


dico ut EH basis ad basim NP, ita esse CM ad AG. si igitur

basis

basis EH basi NP sit æqualis, est autem & AB solidum æquale solido CD; erit & CM æqualis ipsi AG. si [d] enim basibus EH NP æqualibus existentibus non sunt AG CM altitudines æquales, neque AB solidum solido CD æquale erit. ponitur autem æquale. non igitur inæqualis est altitudo CM altitudini AG. ergo æqualis sit necesse est; ac propterea ut EH basis ad basim NP, ita erit CM ad AG. At vero non sit basis EH æqualis basi NP. sed EH sit major. est autem & AB solidum solido CD æquale. ergo major est CM ipsa AG; alioqui rursus sequeretur solida AB CD æqualia non esse, quæ ponuntur æqualia.





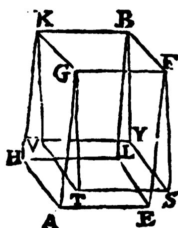
itaque ponatur CT æqualis ipsi AG: & à basi quidem NP, altitudine autem CT solidum parallelepipedum VC compleatur. quoniam igitur solidum AB solido CD est æquale, aliud autem aliquod est VC, & æqualia [a] ad idem eandem habent proportionem; erit ut AB solidum ad solidum VC, ita CD solidum ad solidum CV. sed ut AB solidum ad solidum CV, ita [b] basis EH ad NP basim; æque alta enim sunt AB CV solida. ut autem solidum CD ad ipsam CV, ita [c] MP basis ad basim PT, & MC [d] ad CT. & igitur ut basis EH ad NP basim, ita MC ad CT. est autem CT æqualis AG. ergo & ut EH basis ad basim NP, ita MC ad AG. quare solidorum parallelepipedorum AB CD bases & altitudines reciprocantur. Rursus solidorum parallelepipedorum AB CD bases & altitudines reciprocentur: sitque ut EH basis ad basim NP, ita solidi CD altitudo ad altitudinem solidi AB. Dico solidum AB solido CD æquale esse. sint enim rursus stantes ad rectos angulos basibus. & si quidem basis EH sit æqualis basi NP, estque ut EH basis ad basim NP, ita altitudo solidi CD ad solidi AB altitudinem: erit solidi CD altitudo altitudini solidi AB æqualis. solida autem parallelepipeda, quæ sunt in æqualibus basibus & eadem altitudine inter se [e] æqualia sunt ergo solidum AB solido CD est æquale. Sed non sit EH basis æqualis basi NP, & sit EH major. major igitur est & solidi CD altitudo altitudine solidi AB, hoc est CM ipsa AG. ponatur ipsi AG æqualis rursus CT, & similiter solidum CV compleatur. itaque quoniam est ut EH basis ad basim NP, ita MC ad ipsam AG; æqualis autem est AG ipsi CT: erit ut basis EH ad NP basim, ita MC ad CT. sed ut basis EH ad

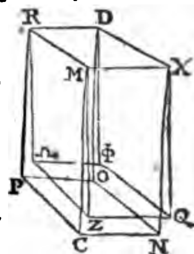
[a] 7. quinti.
[b] 32. hujus.
[c] 25. hujus.
[d] 1. sexti.
[e] 31. hujus.

NP

NP basim, ita AB solidum ad solidum VC; æque alta enim sunt solida AB CV. ut autem MC ad CT, ita & MP basis ad basim PT, & solidum CD ad CV solidum. & igitur ut solidum AB ad solidum CV, ita CD solidum ad solidum CV. quòd cum utrumque solidorum AB CD ad ipsam CV eandem proportionem habeat; erit AB solidum solido CD æquale. Quod demonstrare oportebat.

Non sint autem stantes FE BL GA KH, XN DN MC RP ad rectos angulos basibus ipsorum: & à punctis F G B K, X M D R ad plana basium EH NP ducantur perpendiculares, quæ planis in punctis S T Y V, Q Z Ω Φ occurrant & compleantur solida FV XΩ. dico & sic æqualibus existentibus solidis EB CD, bases & altitudines reciprocari, scil. ut EH basis ad basim NP, ita esse altitudinem solidi CD ad solidi AB altitudinem. quoniam enim solidum AB solido CD est æquale; solido autem AB æquale est *f* solidum BT; in eadem namque sunt basi FK, & eadem altitudine; quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis: & solidum DC est *e* æquale solido DZ, quòd in eadem sint basi XR, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis; erit & solidum BT solido DZ æquale. æqualium autem solidorum parallelepipedorum, quorum altitudines basibus ipsorum sunt ad rectos angulos, bases *g* & altitudines reciprocantur. est igitur ut FK basis ad basim XR, ita solidi DZ altitudo ad altitudinem solidi BT. atque est basis quidem FK basi EH æqualis, basis vero XR æqualis basi NP. quare ut EH basis ad basim NP. ita est altitudo solidi DZ ad solidi BT altitudinem. eædem autem sunt altitudines solidorum DZ DC, itemque solidorum BT BA. est igitur ut EH basis ad basim NP, ita solidi DC altitudo ad altitudinem solidi AB. ergo solidorum parallelepipedorum AB CD bases & altitudines reciprocantur. Rursus solidorum parallelepipedorum AB CD bases & altitudines reciprocentur, sitque ut EH basis ad basim NP, ita altitudo solidi CD ad solidi AB altitudinem. dico solidum AB solido CD æquale esse. iisdem namque constructis, quoniam ut EH basis ad basim NP, ita solidi CD altitudo ad altitudinem solidi AB; & basis quidem EH est æqualis basi FK; NP vero ipsi XR: erit ut FK basis ad basim XR, ita altitudo





f 30. hujus.

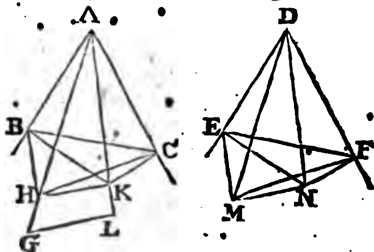
g Ex ante demonstratis.

altitudo solido C D ad solidi A B altitudinem. eædem autem sunt altitudines solidorum A B B T, & ipsorum C D D Z. est igitur ut F K basis ad basim X R, ita solidi D Z altitudo ad altitudinem solidi B T. quare solidorum B T D Z parallelepipedorum bases & altitudines reciprocantur, quorum autem solidorum parallelepipedorum altitudines sunt ad rectos angulos basibus ipsorum, & bases & altitudines reciprocantur, ea inter se sunt æqualia. ergo B T solidum solido D Z est æquale. sed solidum quidem B T æquale est solido B A, etenim in eadem sunt basi F K, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis: solidum vero D Z est æquale solido D C, si quidem in eadem sunt basi X R, & eadem altitudine, & non in eisdem rectis lineis. ergo & solidum A B solido C D est æquale. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXXV. THEOR.

Si sint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ insistant, quæ cum rectis lineis à principio positis angulos contineant æquales, alterum alteri; in sublimibus autem sumantur quævis puncta, atque ab ipsis ad plana, in quibus sunt, anguli perpendiculares ducantur; & à punctis, quæ à perpendicularibus fiunt in planis ad primos angulos jungantur rectæ lineæ: cum sublimibus æquales angulos continebunt.

Sint duo anguli rectilinei æquales B A C E D F: & à punctis A D sublimes rectæ lineæ A G D M constituantur, quæ cum rectis lineis à principio positis æquales angulos contineant, alterum alteri: angulum quidem M D E æqualem angulo G A B, angulum vero M D F angulo G A C æqualem: & sumantur in ipsis A G D M quævis puncta G, M, à quibus ad plana per B A C E D F ducantur perpendiculares G L M N occurrentes planis in punctis L N; & L A



N D jungantur. dico angulum G A L angulo M D N æqualem esse. ponatur ipsi D M æqualis A H, & per H ipsi G L parallela ducatur H K. est autem G L perpendicularis ad planum per

per BAC. ergo & HK ad [a] planum per BAC perpendicularis erit. ducantur à punctis K N ad rectas lineas AB AC DF DE perpendiculares KC NF KB NE, & HC CB MF FE jungantur. quoniam igitur quadratum ex HA æquale [b] est quadratis ex HK KA; quadrato autem ex KA æqualia [b] sunt ex KC CA quadrata: erit quadratum ex HA quadratis ex HK KC CA æquale. quadratis autem ex HK KC æquale est quadratum est HC. quadratum igitur ex HA quadratis ex HC CA æquale erit: & idcirco angulus HCA [c] est rectus. eadem ratione & angulus DFM rectus est. ergo angulus ACH ipsi DFM est æqualis. est autem & HAC angulus æqualis angulo MDF. duo igitur triangula sunt MDF HAC duos angulos dnobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & unum latus uni lateri æquale, quod uni æqualium angulorum subtenditur; vicelicet HA ipsi DM. ergo & reliqua latera reliquis lateribus [d] æqualia habebunt, alterum alteri. quare AC est æqualis DF. similiter demonstrabimus & AB ipsi DE æquale esse. jungantur enim HB ME. & quoniam quadratum ex AH est æquale quadratis ex AK KH; quadrato autem ex AK æqualia sunt quadrata ex AB BK: erunt quadrata ex AB BK KH quadrato ex AH æqualia. sed quadratis ex BK KH æquale est ex BH quadratum; rectus enim angulus est HKB, propterea quòd & DK perpendicularis est ad subjectum planum. quadratum [b] igitur ex AH æquale est quadratis ex AB BH. quare angulus ABH [c] rectus est. eadem ratione & angulus DEM est rectus. est autem & BAH angulus æqualis angulo EDM, ita enim ponitur: atque est AH æqualis DM. ergo & AB ipsi DE [d] est æqualis. quoniam igitur AC quidem est æqualis DE, AB vero ipsi DE; erunt duæ CA AB duabus FD DE æquales. sed & angulus BAC angulo FDE est æqualis, basis [e] igitur BC basi EF, & triangulum triangulo, & reliqui anguli reliquis angulis æquales sunt. ergo angulus ACB angulo DFE est æqualis. est autem & rectus ACK æqualis recto DFN. quare & reliquus BCK reliquo EFN æqualis. eadem ratione, & CBK angulus est æqualis angulo FEN. itaque duo triangula sunt BCK FEN, duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & unum latus uni lateri æquale, quod est ad æquales angulos, videlicet BC ipsi EF. ergo & [d] reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt. æquails igitur est CK ipsi FN. est autem & AC ipsi DF æqualis. quare duæ AC CK duabus DF FN æquales sunt: & rectos continent angulos. basis igitur AK est æqualis basi DN. & cum AH sit æqualis DM, erit & quod fit ex AH quadratum quadrato ex DM æquale. sed quadrato ex AH æqualia sunt ex AK KH quadrata; etenim

[a] 8. hujus.
[b] 47. primi.
[c] 48. primi.
[d] 26. primi.
[e] 4. primi.

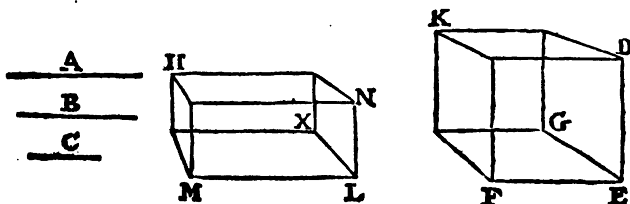
nim rectus est angulus AKH. quadrato autem ex DM æqualia sunt quadrata ex DN NM, quòd angulus DNM rectus sit. quadrata igitur ex AK KH quadratis ex DN NM sunt æqualia. quorum quadratum ex AK æquale est quadrato ex DN. ergo reliquum ex KH quadratum reliquo quadrato ex NM est æquale. & ideo recta linea HK ipsi MN æqualis. quod cum duæ HA AK duabus MD DN æquales sint, altera alteri, & basis HK basi NM ostensa sit æqualis; angulus HAK
f 8. primi. angulo MDN æqualis f erit. Quod oportebat demonstrare.

Cor. Ex hoc manifestum est, si sint duo anguli plani rectilinei æquales, ab ipsis autem constituantur sublimes rectæ lineæ æquales, quæ cum rectis lineis à principio positis æquales contineant angulos, alterum alteri, perpendiculares, quæ ab ipsis ad plana, in quibus sunt primi anguli, ducantur, inter se æquales esse.

PROP. XXXVI. THEOR.

Si tres rectæ lineæ proportionales sint, solidum parallelepipedum quod à tribus fit, æquale est solido parallelepipedo quod fit à media, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto.

Sint tres rectæ lineæ proportionales A B C, sit scil. ut A ad B ita B ad C. dico solidum quod fit ex ipsis A B C, æquale esse solido quod fit ex B, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto. Exponatur solidus angulus ad E contentus tribus angulis planis DEG GEF FED; & ipsi quidem B ponatur æqualis unaquæque ipsarum DE GE EF; & solidum



parallelepipedum EK compleatur: ipsi vero A ponatur æqualis LM; & ad rectam lineam LM, & ad punctum in
a 26. hujus. ipsa L, constituatur a angulo solido ad E æqualis angulus contentus NLX XLM MLN; & ponatur ipsi quidem B æqualis LN, ipsi vero C æqualis LX. quoniam igitur est ut A ad B ita B ad C, æqualis autem est A ipsi LM, & B unicuique ipsarum LN EF FG ED, & C ipsi LX; erit ut LM ad EF

ita

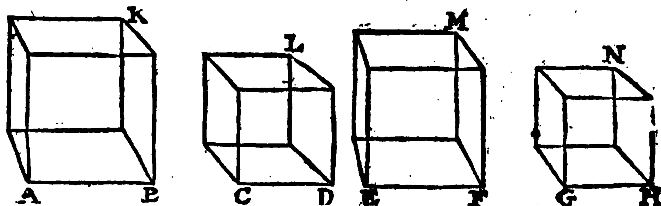
ita GE ad LX. & circum æquales angulos MLX GEF, latera sunt reciproca. ergo MX parallelogrammum parallelogrammo GF est [b] æquale. & quoniam duo anguli plani rectilinei æquales sunt GEF XLM, & in ipsis sublimes rectæ lineæ constituuntur LN ED æquales inter se, & cum rectis lineis à principio positis æquales continentes angulos, alterum alteri; eruunt [c] perpendiculares quæ à punctis N D ad plana per XLM GEF ducuntur, inter se æquales. ergo solida LH EK eadem sunt altitudine. quæ vero in æqualibus basibus sunt solida parallelepipeda, & eadem altitudine, inter se [d] sunt æqualia. ergo solidum HL æquale est solido EK. atque est solidum quidem HL quod fit à tribus A B C, solidum vero EK quod fit ex B. Si igitur tres rectæ lineæ proportionales sint, solidum parallelepipedum quod fit à tribus, æquale est solido parallelepipedo quod fit, &c. Quod demonstrare oportebat.

b 14. sexti.
c Cor. 35. hujus.
d 31. hujus.

PROP. XXXVII. THEOR.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales sint, & quæ ab ipsis fiunt solida parallelepipeda similia & similiter descripta proportionalia erunt. Et si quæ ab ipsis fiunt solida parallelepipeda similia & similiter descripta proportionalia sint; & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales AB CD EF GH, sit scil. ut AB ad CD, ita EF ad GH, & describantur ab ipsis AB CD EF GH similia & similiter posita solida parallelepipeda KA LC ME NG. dico ut KA ad LC, ita esse ME ad NG. Quoniam enim solidum parallelepipedum KA simile est ipsi LC, habebit [a] KA ad LC triplicatam proportionem ejus



quam AB habet ad CD. eadem ratione & solidum ME ad ipsam NG [a] triplicatam proportionem habebit ejus quam habet EF ad GH. atque est ut AB ad CD, ita EF ad GH. ut igitur AK ad LC, ita ME ad NG. Sed sit ut solidum AK ad solidum LC, ita ME solidum ad solidum NG. dico, ut

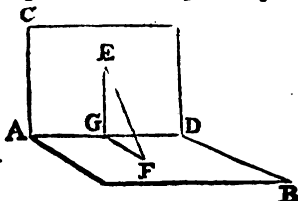
a 33. hujus.

recta linea A B ad rectam C D, ita esse rectam E F ad ipsam
b 33. hujus. G H. quoniam enim rursus A K ad L C triplicatam b proportionem habet ejus quam A B habet ad C D; habet autem & M E ad N G triplicatam proportionem ejus quam E F ad G H; atque ut A K ad L C, ita M E ad N G: erit ut A B ad C D, ita E F ad G H. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales sint, &c. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXXVIII. THEOR.

Si planum ad planum rectum sit; & ad aliquo puncto eorum quæ sunt in uno plano, ad alterum planum perpendicularis ducatur: ea in communem planorum sectionem cadet.

Planum nempe C D ad planum A B rectum sit, communis autem eorum sectio sit A D, & in ipso C D plano, quodvis punctum E sumatur. dico perpendicularem quæ à puncto E ad planum A B ducitur, cadere in ipsam A D. Non enim; sed si fieri potest, cadat extra, ut E F; & plano A B in puncto F occurrat: à puncto autem F ad D A in plano A B perpendicula-



a 10. primi. ris a ducatur F G, quæ quidem
b 4. Def. hujus. & plano C D ad b rectos angulos erit; & E G jungatur. quoniam igitur F D plano C D est ad rectos angulos; contingit autem ipsam recta linea E G quæ est in eodem C D plano:
c 3. Def. hujus. erit angulus F G E c rectus. sed & E F plano A B ad rectos angulos est: rectus igitur est angulus E F G. quare trianguli
d 17. primi. E F G duo anguli duobus rectis sunt æquales; quod est d absurdum. non igitur à puncto E ad A B planum perpendicularis ducta extra rectam lineam D A cadet. ergo in ipsam cadat necesse est. Si igitur planum ad plannm rectum sit, &c. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXXIX. THEOR.

Si in solido parallelepipedo oppositorum planorum latera secentur bifariam, per sectiones vero plana ducantur; communis planorum sectio, & solidi parallelepipedi diameter, sese bifariam secabunt.

In solido enim parallepipedo A F, oppositorum planorum C F A H latera bifariam secentur in punctis K L M N X O R P.

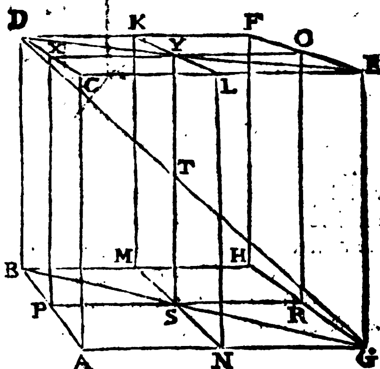
&

& per sectiones plana ducantur KN XR; communis autem planorum sectio sit YS, & solidi parallelepipedi diameter sit DG. dico YS DG sese bifariam secare, hoc est YT quidem ipsi TS, DT vero ipsi TG æqualem esse. Jungantur enim DY YE BS SG. quoniam igitur DX parallela est ipsi OE, alterni anguli DXO YOE inter se æquales *a* sunt. & quoniam DX quidem est æqualis OE, XY vero ipsi YO, & angulos æquales continent; erit *b* basis DY æqualis basi YE. & triangulum DXY triangulo YOE, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, angulus igitur XYD est æqualis angulo OYE, & ob id *c* recta linea est DYE. eadem ratione, & BSG recta est, atque est BS æqualis SG. &

a 29. primi.

b 4. primi.

c 14. primi.



quoniam CA ipsi DB æqualis est & parallela, & CA est æqualis & parallela ipsi EG; erit & DB ipsi EG æqualis & parallela; & ipsas conjungunt rectæ lineæ DE GB: parallela igitur *d* est DE ipsi BG. & sumpta sunt in utraque ipsarum quævis puncta D Y G S, & junctæ sunt DG YS. ergo DG YS in uno *e* sunt plano. quod cum DE sit parallela BG, erit & EDT angulus angulo BGT æqualis *a*, alterni enim sunt. est autem & DTY angulus æqualis *f* ipsi GTS. duo igitur sunt triangula DTY GTS duos angulos duobus angulis æquales habentia, & unum latus uni lateri æquale, quod uni æqualium angulorum subtenditur, videlicet DY ipsi GS: dimidia enim sunt ipsorum DE BG. ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt. quare DT quidem est æqualis TG, YT vero ipsi TS. Si igitur in solido parallelepipedo, &c. Quod oportebat demonstrare.

d 33. primi.

e 7. hujus.

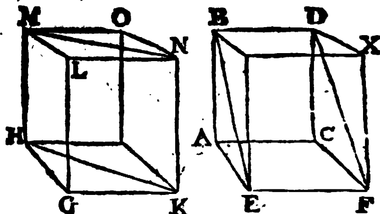
f 15. primi.

PROP. XL. THEOR.

Si sint duo prismata æque alta, quorum unum quidem basim habeat parallelogrammum, alterum vero triangulum, & parallelogrammum duplum sit trianguli; ea inter se æqualia erunt.

Sint prismata æque alta ABCDEF GHKLMN. & unum quidem basim habeat parallelogrammum AF, alterum vero

GHK triangulum, & duplum sit AF parallelogrammum trianguli GHK. dico prisma ABCDEF prismati GHKLMN æquale esse. Compleantur enim AX GO solida. & quoniam parallelogrammum AF trianguli GHK est duplum; est autem & HK parallelogrammum duplum *a* trianguli GHK: erit AF parallelogrammum parallelogrammo HK æquale. quæ vero in æqualibus sunt basibus solida parallelepipeda, & eadem altitudine, inter se æqualia *b* sunt. æquale igitur AX solidum solido GO. atque est solidi quidem AX dimidium *c* ABCDEF prisma, solidi vero GO dimidium *c* est prisma GHKLMN. ergo ABCDEF prisma prismati GHKLMN est æquale. Si igitur sint duo prismata æque alta, &c. Quod demonstrare oportebat.



a 41. primi.
b 31. hujus.
c 28. hujus.

EUCLIDIS

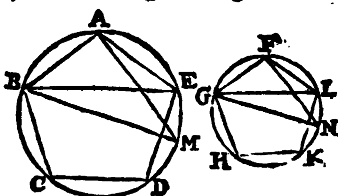
EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER DUODECIMUS.

PROPOSITIO I. THEOREMA.

Similia polygona circulis inscripta inter se sunt ut diametrum quadrata.

Sint circuli ABCDE FGHKL, & in ipsis similia polygona ABCDE FGHKL; diametrum autem circulorum sint BM GN. dico ut quadratum ex BM ad quadratum ex GN, ita esse ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL. jungantur enim BE AM KL FN. & quoniam polygonum ABCDE simile est polygono FGHKL; & BAE angulus angulo GFL est æqualis: atque est ut BA ad AE, ita GF ad FL. duo igitur triangula sunt BAE GFL unum angulum uni angulo æqualem habentia, videlicet angulum BAE angulo GFL, circa æquales autem angulos latera proportionalia: quare triangulum ABE triangulo FGL æquiangulum [a] est; ac propterea angulus AEB æqualis est angulo FLG. sed angulus quidem AEB angulo AMB est [b] æqualis; in eadem enim circumferentia consistunt. angulus autem FLG æqualis [b] est angulo FNG. ergo & AMB angulus est æqualis angulo FNG. est autem & rectus [c] angulus BAM æqualis recto GFN. quare & reliquus reliquo æqualis. æquiangulum igitur est triangulum AMB triangulo FGN. ergo [d] ut BM ad GN ita BA ad GF. sed proportionis quidem BM ad GN duplicata est proportio quadrati ex BM ad quadratum



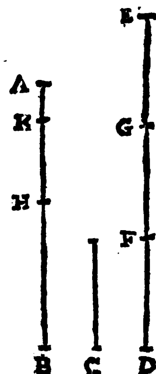
a 6. sexti.
b 21. tertii.
c 31. tertii.
d 4. sexti.

a 20. sexti. quadratum ex GN; proportionis vero BA ad GF duplicata a est proportio ABCDE polygoni ad poligonum FGHKL: & ut igitur quadratum ex BM ad quadratum ex GN, ita polygonum ABCDE ad FGHKL polygonum. Quare similia polygona quæ in circulis describuntur, inter se sunt ut diametrorum quadrata. Quod demonstrare oportebat.

LEMMA.

Duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, si à majori auferatur majus quàm dimidium, & ab eo quod reliquum est, rursus auferatur majus quàm dimidium; & hoc semper fiat: relinquetur tandem quædam magnitudo quæ minori magnitudine exposita minor erit.

Sint duæ magnitudines inæquales AB, C, quarum major AB. dico si ab ipsa AB auferatur majus quàm dimidium, & ab eo quod reliquum est, rursus auferatur majus quàm dimidium, atque hoc semper fiat, relinqui tandem magnitudinem quandam, quæ magnitudine C minor erit. etenim C multiplicata, fiet aliquando major magnitudine AB. multiplicetur, & sit DE ipsius quidem C multiplex, major autem quam AB: dividaturque DE in partes ipsi C æquales DF FG GE. & ab ipsa AB auferatur majus quam dimidium BH, ab ipsa vero AH rursus majus quam dimidium auferatur HK, atque hoc semper fiat, quoad divisiones, quæ sunt in AB, multitudine æquales fiunt divisionibus quæ in DE: sint igitur divisiones AK KH HB, divisionibus DF FG GE multitudine æquales.



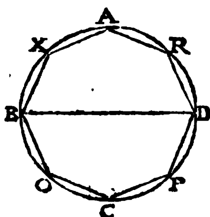
& quoniam major est DE quam AB, & ablatum est ab ipsa quidem DE minus quam dimidium EG: ab ipsa vero AB majus quam dimidium BH: erit reliquum GD reliquo HA majus. rursus quoniam major est GD, quam HA: & ablatum est ab ipsa quidem GD dimidium GF, ab ipsa vero HA majus quam dimidium HK: reliquum FD reliquo AK majus erit. estque FD æqualis ipsi C ergo C quam AK est major. minor igitur est AK quam C. ergo ex magnitudine AB relicta est magnitudo AK, exposita minori magnitudine

tudine c minor. Quod demonstrare oportebat. Similiter autem demonstrabitur, etiam si dimida ablata fuerint. *Est prima decimi.*

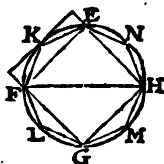
PROP. II. THEOR.

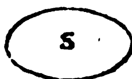
Circuli inter se sunt ut diametrorum quadrata.

Sint circuli ABCD EFGH, diametri autem ipsorum sint BD FH. dico ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita esse circuli ABCD ad EFGK circulum. Si enim non ita sit; erit ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita circulus ABCD vel ad spatium aliquod minus circulo EFGH, vel ad majus. sit primum ad minus quod sit S. & in circulo EFGH describatur quadratum EFGH. itaque descriptum in circulo quadratum majus est dimidio circuli EFGH, quoniam si per puncta E F G H contingentes circulum ducamus, erit descripti circa circulum quadrati *a* dimidium EFGH. descripto autem circa circulum quadrato minor est circulus. ergo quadratum EFGH majus est dimidio circuli EFGH. secentur bifariam circumferentiæ EF FG GH HE in punctis K L M N: & EK KF FL LG GM MH HN NE jungantur. unumquodque igitur triangulorum EKF FLG GMH HNE majus est dimidio segmenti circuli in quo consistit: quoniam si per puncta K L M N contingentes circulum ducamus, & parallelogramma, quæ sunt in rectas lineas EF FG GH HE compleamus; erit *b* unumquodque triangulorum EKF FLG GMH HNE dimidium parallelogrammi, quod ad ipsum est. sed segmentum minus est parallelogrammo. quare unumquodque triangulorum EKF FLG GMH HNE majus est dimidio segmenti circuli, in quo consistit. Hasce igitur circumferentias bifariam secantes, & jungentes rectas lineas, atque hoc semper facientes, relinquemus tandem quædam circuli segmenta, quæ minora erunt excessu, quo circulus EFGH ipsum S spatium superat. etenim ostensum est in præcedenti Lemmate, duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, si à majori auferatur majus quam dimidium, & ab eo quod relinquitur, rursus majus quam dimidium,



a 47. primi. & 31. tertii.





b 41. primi.

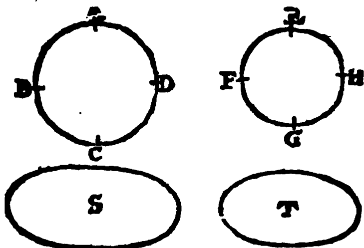
dium, & hoc semper fiat; relinqui tandem magnitudinem aliquam, quæ minori magnitudine exposita sit minor. itaque relicta sint segmenta circuli E F G H in rectas lineas E K K F F L L G G M M H H N N E, quæ minora sint excessu, quo circulus E F G H ipsum S spatium superat. ergo reliquum E K F L G M H N polygonum majus erit spatio S. Describatur etiam in circulo A B C D, polygono E K F L G M H N simile polygonum A X B O C P D R. est igitur ut quadratum ex B D

c 1. hujus. ad quadratum ex F H, c ita polygonum A X B O C P D R ad E K F L G M H N polygonum. sed & ut quadratum ex B D ad quadratum ex F H, ita A B C D circulus ad spatium S. ergo &

d 11. quinti. d ut circulus A B C D ad spatium S, ita polygonum A X B O C P D R ad E K F L G M H N polygonum. major autem est circulus A B C D eo quod in ipso est polygono. quare & spa-

e 14. quinti. tium S majus est e polygono E K F L G M H N. sed & f minus.

f Ex prius demonstratis. quod fieri non potest. Non igitur est ut quadratum ex B D ad quadratum ex F H ita A B C D circulus ad spatium aliquod minus circulo E F G H. Similiter ostendemus neque esse ut quadratum ex F H ad quadratum ex B D, ita circulum E F G H ad aliquod spatium minus circulo A B C D.



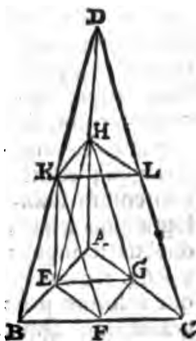
dico igitur neque esse ut quadratum ex B D ad quadratum ex F H, ita circulum A B C D ad aliquod spatium majus circulo E F G H. si enim fieri potest, sit ad majus spatium S. erit igitur invertendo ut quadratum ex F H ad quadratum ex B D, ita spatium S ad A B C D circulum. sed quoniam S majus est E F G H circulo; erit ut spatium S ad A B C D circulum, ita circulus E F G H ad aliquod spatium minus circulo A B C D. ergo & ut quadratum ex F H ad quadratum ex B D, ita E F G H circulus ad aliquod spatium minus e circulo A B C D, quod fieri non posse ostensum est. non igitur ut quadratum ex B D ad quadratum ex F H, ita est circulus A B C D ad spatium aliquod majus E F G H circulo. ostensum autem est neque ad minus. quare ut quadratum ex B D ad quadratum ex F H, ita erit A B C D circulus ad circulum E F G H: Circuli igitur inter se sunt ut diametrorum quadrata. Quod ostendere oportebat.

PROP.

PROP. III. THEOR.

Omnis pyramis triangularem habens basim dividitur in duas pyramides æquales & similes inter se, quæ triangulares bases habent, similesque toti, & in duo prismata æqualia, quæ quidem prismata dimidio totius pyramidis sunt majora.

Sit pyramis, cujus basis quidem ABC triangulum; vertex autem punctum D. dico pyramidem ABCD dividi in duas pyramides æquales & similes inter se, triangulares bases habentes, & similes toti, & in duo prismata æqualia; & duo prismata dimidio totius pyramidis esse majora. secentur enim AB BC CA AD DB DC bifariam in punctis E F G H K L, & EH EG GH HK KL LH EK KF FG jungantur. quoniam igitur AE quidem est æqualis EB, AH vero ipsi HD; erit [a] HE ipsi DB parallela. eadem ratione & HK est parallela ipsi AB. parallelogrammum igitur est HEBK. quare HK est [b] æqualis EB. sed EB ipsi AE est æqualis. ergo & AE ipsi HK æqualis erit. est autem & AH æqualis HD. duæ igitur AE AH duabus KH HD æquales sunt, altera alteri, & angulus EAH æqualis [c] angulo KHD; basis igitur [d] EH basi KD est æqualis: quare triangulum AEH æquale est & simile triangulo HKD. eadem ratione & triangulum AHG triangulo HLD æquale est & simile. & quoniam duæ rectæ lineæ sese tangentes EH HG duabus rectis lineis sese tangentibus KD DL parallelæ sunt, non autem in eodem plano, æquales angulos [e] continebunt. ergo angulus EHG est æqualis angulo KDL. rursus quoniam duæ rectæ lineæ EH HG duabus KD DL æquales sunt, altera alteri, & angulus EHG est æqualis angulo KDL; erit [d] basis EG basi KL æqualis: æquale igitur est & simile triangulum EHG triangulo KDL. eadem ratione & AEG triangulum est æquale & simile triangulo HKL. quare pyramis cujus basis quidem est AEG triangnlum, vertex autem punctum H, æqualis & similis est pyramidi cujus basis est triangulum KHL, & vertex D punctum. & quoniam uni laterum trianguli ADB, videlicet ipsi AB, parallela ducta est HK; erit triangulum ADB triangulo DKH æquiangulum,



[a] 2. sexti.
[b] 34. primi.
[c] 29. primi.
[d] 4. primi.
[e] 10. undecimi.

angulum, & latera habent proportionalia. simile igitur est ADB triangulum triangulo DHK. est eadem ratione triangulum quidem DBC simile est triangulo DKL; triangulum vero ADC triangulo DHL. & cum duæ rectæ lineæ sese tangentes BA AC duabus rectis lineis sese tangentibus KH HL parallelæ sint, non existentes in eodem plano, hæ æquales angulos *f* continebunt. angulus igitur BAC angulo HKL est æqualis. atque est ut BA ad AC, ita KH ad HL. ergo ABC triangulum *g* simile est triangulo HKL; ideoque pyramis, cujus basis quidem triangulum ABC, vertex autem punctum D, similis est pyramidi, cujus basis triangulum HKL, & vertex punctum D. sed pyramis cujus basis quidem HKL triangulum, vertex autem punctum D, ostensa est similis pyramidi, cujus basis triangulum AEG, & vertex H punctum. quare & pyramis cujus basis triangulum ABC & vertex punctum D, similis est pyramidi cujus basis AEG triangulum, & vertex punctum H. utraque igitur ipsarum AEGH HKLD pyramidum similis est toti pyramidi ABCD. & quoniam BF est æqualis FC, erit EBFG parallelogrammum *h* duplum trianguli GFC. & quoniam duo prismata æque alta sunt, quorum unum quidem basim habet parallelogrammum, alterum vero triangulum. estque parallelogrammum duplum trianguli; erunt ea prismata inter se æqualia *i*. ergo prisma contentum duobus triangulis BKF EHG, & tribus parallelogrammis EBFG EBKH KHGF, est æquale prismati quod duobus triangulis GFC HKL, & tribus parallelogrammis KFCL LCGH HKFG continetur. & manifestum est utrumque ipsorum prismatum, & cujus basis est EBFG parallelogrammum, opposita autem ipsi HK recta linea, & cujus basis est GFC triangulum, & oppositum ipsi triangulum KLH, majus esse utraque pyramidum, quarum bases quidem AEG HKL triangula, vertices autem puncta H D: quoniam si jungamus EF EH rectas lineas, prisma quidem, cujus basis est EBFG parallelogrammum, & opposita ipsi recta linea KH, majus est pyramide cujus basis EBF triangulum, vertex autem punctum K. sed pyramis, cujus basis triangulum EBF, & vertex K punctum, est *k* æqualis pyramidi cujus basis AEG triangulum, & vertex punctum H; æqualibus enim & similibus planis continentur. quare & prisma cujus basis parallelogrammum EBFG, opposita autem ipsi

f 10. undecimi.

g 6. sexti. & 1. Def. ejusdem.

h 41. primi.

i 40. undecimi.

k 10. Def. undecimi.

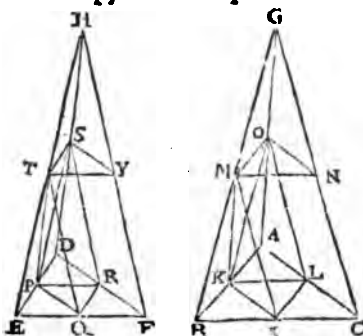
D H K L A E G B F C

ipsi recta linea H K, majus est pyramide cujus basis A E G triangulum & vertex punctum H. prisma vero cujus basis parallelogrammum E B F G, & opposita ipsi recta linea H K est æquale prismati cujus basis G F C triangulum, & ipsi oppositum triangulum H K L: & pyramis cujus basis triangulum A E G, vertex autem H punctum, est æqualis pyramidi cujus basis H K L triangulum, & vertex punctum D. ergo duo prismata de quibus dictum est, sunt majora duabus dictis pyramidibus quarum bases triangula A E G H K L, vertices autem H D puncta. Tota igitur pyramis cujus basis A B C triangulum, vertex autem punctum D, divisa est in duas pyramides æquales, & similes inter se, & similes toti: & in duo prismata æqualia: suntque duo prismata dimidio totius pyramidis majora. Quæ ostendere oportebat.

PROP. IV. THEOR.

Si sint duæ pyramides æque altæ, quæ triangulares bases habeant, dividatur autem utraque ipsarum, & in duas pyramides æquales inter se, similesque toti, & in dua prismata æqualia; & factarum pyramidum utraque eodem modo dividatur, atque hoc semper fiat: erit ut unius pyramidis basis ad basim alterius, ita & in una pyramide prismata omnia ad prismata omnia in altera pyramide multitudine æqualia.

Sint duæ pyramides æque altæ quæ triangulares bases habeant A B C D E F, vertices autem sint puncta G H, & dividatur utraque ipsarum in duas pyramides æquales inter se, similesque toti, & in duo prismata æqualia; & factarum pyramidum utraque eodem modo divisa intelligatur: atque hoc semper fiat. dico ut A B C basis ad basim D E F, ita esse prismata omnia quæ sunt in pyramide A B C G ad prismata omnia quæ in pyramide D E F H multitudine æqualia.



Quoniam enim B X quidem est æqualis X C, A L vero æqualis L C; erit [a] X L ipsi A B parallela, & triangulum A B C triangulo L X C simile. eadem ratione & triangulum

[a] 2. sexti.

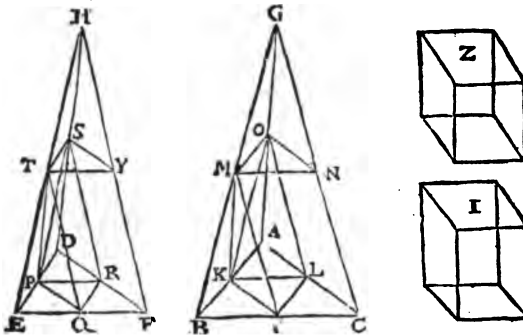
gulum DEF simile est triangulo RQF. & quoniam BC quidem est dupla CX, EF vero dupla ipsius FQ, ut BC ad CX, ita erit EF ad FQ. & descripta sunt ab ipsis BC CX similia & similiter posita rectilinea ABC LXC; ab ipsis vero EF FQ similia & similiter posita rectilinea DEF RQF. est
b 22. sexti. igitur b ut BAC triangulum ad triangulum LXC, ita triangulum DEF ad RQF triangulum; & permutando ut triangulum ABC ad triangulum DEF, ita LXC triangulum ad triangulum RQF. sed ut LXC triangulum ad triangulum
c 28. & 32. undecimi. RQF, ita c prisma cujus basis est triangulum LXC, oppositum autem ipsi OMN, ad prisma cujus basis RQF triangulum &
d 11. quinti. oppositum ipsi STY. ut igitur d ABC triangulum ad triangulum DEF, ita prisma cujus basis est triangulum LXC, oppositum autem ipsi OMN, ad prisma cujus basis RQF triangulum, & oppositum ipsi STY. & quoniam duo prismata quæ in pyramide ABCG inter se æqualia sunt, sed & quæ in pyramide DEFH prismata inter se sunt æqualia; erit ut prisma cujus basis parallelogrammum KLXB, opposita vero ipsi recta linea MO, ad prisma cujus basis LXC triangulum, & oppositum ipsi OMN, ita prisma cujus basis parallelogrammum EPRQ, & opposita recta linea ST, ad prisma cujus basis RQF triangulum, oppositum vero ipsi STY. quare componendo, ut prismata KBXLMO LXCMNO ad prisma LXCMNO, ita prismata PEQRST RQFSTY ad prisma RQFSTY. & permutando, ut prismata KBXLMO LXCOMN ad prismata PEQRST RQFSTY, ita prisma LXCMNO ad prisma RQFSTY. ut autem prisma LXCMNO ad prisma RQFSTY, ita ostensa est basis LXC ad RQF basim, & ABC basis ad basim DEF. ergo & ut triangulum ABC ad triangulum DEF, ita quæ in pyramide ABCG duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide DEFH. similiter autem, & si factas pyramides dividamus eodem modo velut OMNG STYH, erit ut OMN basis ad basim STY, ita quæ in pyramide OMNG duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide STYH. sed ut OMN basis ad basim STY, ita basis ABC ad DEF basim. & ut igitur ABC basis ad basim DEF, ita quæ in pyramide ABCG duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide DEFH; & quæ in pyramide OMNG duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide STYH; & quatuor ad quatuor. eadem autem ostendentur & in factis prismatibus ex divisione pyramidum AKLO, & DPRS, & omnium simpliciter multitudine æqualium. Quod demonstrare oportebat.

PROP.

PROP. V. THEOR.

Pyramides quæ eadem sunt altitudine, & triangulares bases habent, inter se sunt ut bases.

Sint eadem altitudine pyramides, quarum bases quidem triangula ABC DEF, vertices autem puncta G H. dico ut ABC basis ad basim DEF, sic esse pyramidem ABCG ad DEFH pyramidem. Si enim non ita sit, erit ut ABC basis ad basim DEF, sic ABCG pyramis, vel ad solidum minus pyramide DEFH, vel ad majus. sit primum ad solidum minus, sitque Z. & dividatur pyramis DEFG in duas pyramides æquales inter se, & similes toti, & in duo prismata æqualia. sunt duo igitur prismata [a] dimidio totius pyramidis majora. & rursus pyramides ex divisione factæ similiter dividantur, atque hoc semper fiat, quoad sumantur quædam pyramides à pyramide DEFH, quæ sint minores excessu quo pyramis DEFH solidum Z superat. itaque sumantur, & [a] 3. hujus.



sint exempli causa, pyramides DPRS STYH. erunt igitur reliqua in pyramide DEFH prismata solido Z majora. dividatur etiam ABCD pyramis in totidem partes similes pyramidi DEFH. ergo [b] ut ABC basis ad basim DEF, ita quæ in pyramide ABCD prismata ad prismata quæ in pyramide DEFH. sed ut ABC basis ad basim DEF, ita pyramis ABCG ad solidum Z. & igitur ut ABCG pyramis ad solidum Z, ita quæ in pyramide ABCG prismata ad prismata quæ in pyramide DEFH. major autem est pyramis ABCG prismatibus quæ in ipsa sunt. ergo & solidum Z prismatibus, quæ sunt in pyramide DEFH, est majus. sed & [c] minus. quod fieri non potest. non igitur ut ABC basis ad basim DEF, ita est pyramis ABCG ad solidum aliquot minus pyramide DEFH. similiter ostendemus neque ut DEF basis ad basim

[b] 4. hujus.

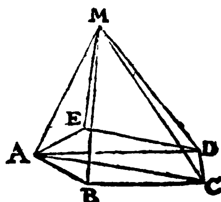
[c] Ex prius demonstratis.

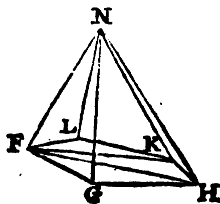
basim ABC, ita esse pyramidem DEFH ad solidum aliquod pyramide ABCG minus. dico igitur neque esse ut ABC basis ad basim DEF, ita ABCG pyramidem ad aliquod solidum majus pyramide DEFH. si enim fieri potest, sit ad majus, videlicet ad solidum I. erit igitur invertendo ut DEF basis ad basim ABC, ita solidum I ad ABCG pyramidem. cum autem solidum I majus est pyramide EDFH, erit ut solidum I ad ABCG pyramidem, ita DEFH pyramis ad solidum aliquod minus pyramide ABCG, ut proxime ostensum fuit. & ut igitur DEF basis ad basim ABC, ita pyramis DEFH ad solidum aliquod pyramide ABCG minus, quod est absurdum non igitur ut ABC basis ad basim DEF, ita est ABCG pyramis ad solidum aliquod majus pyramide DEFH. ostensum autem est, neque ad minus. quare ut ABC basis ad basim DEF, ita est pyramis ABCG ad DEFH pyramidem. Pyramides igitur quæ eadem sunt altitudine, & triangulares bases habent, inter se sunt ut bases. Quod demonstrare oportebat.

PROP. VI. THEOR.

Pyramides, quæ eadem sunt altitudine, & polygonas bases habent, inter se sunt ut bases.

Sint eadem altitudine pyramides, quæ polygonas bases habeant ABCDE BGHKL: vertices autem M N puncta. dico ut ABCDE basis ad basim FGHKL, ita esse ABCDEM pyramidem ad pyramidem FGHKLN. dividatur enim basis quidem ABCDE in triangula ABC ACD ADE; basis vero





FGHKL dividatur in triangula FGH FHK FKL. & in uno quoque triangulo intelligantur pyramides æque altæ atque pyramides quæ à principio. quoniam igitur est ut triangulum ABC ad triangulum ACD, a ita ABCM pyramis ad pyramidem ACDM: & componendo ut ABCD trapezium ad triangulum ACD, ita ABCDM pyramis ad pyramidem ACDM. sed & ut ACD triangulum ad ADE, ita a pyramis ACDM ad ADEM pyramidem. ergo ex æquali, ut ABCD basis ad basim ADE, ita ABCDM pyramis ad pyramidem ADEM.

a 5. hujus.

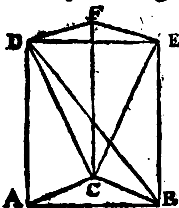
&

& rursus componendo ut ABCDE basis ad basim ADE, ita ABCDEM pyramis ad pyramidem ADEM. eadem ratione, & ut FGHKL basis ad basim FKL, ita & FGHKLN pyramis ad FKLN pyramidem. & quoniam duæ pyramides sunt ADEM FKLN, quæ triangulares bases habent, & eadem sunt altitudine; erit ᵃ ut ADE basis ad basim FKL, ita ADEM pyramis ad pyramidem FKLN. quòd cum sit ut ABCDE basis ad basim ADE, ita ABCDEM pyramis ad pyramidem ADEM; ut autem ADE basis ad basim FKL, ita ADEM pyramis ad pyramidem FKLN: erit ex æquali, ut basis ABCDE ad FKL basim, ita ABCDEM pyramis ad pyramidem FKLN. sed & ut FKL basis ad basim FGHKL, ita erat & FKLN pyramis ad pyramidem FGHKLN. quare rursus ex æquali, ut ABCDE basis ad basim FGHKL, ita est ABCDEM pyramis ad pyramidem FGHKLN. Pyramides igitur quæ eadem sunt altitudine, & polygonas bases habent, inter se sunt ut bases. Quod oportebat demonstrare.

PROP. VII. THEOR.

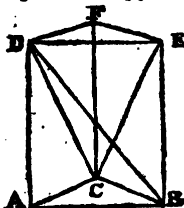
Omne prisma triangularem habens basim, dividatur in tres pyramides æquales inter se, quæ triangulares bases habent.

Sit prisma cujus basis quidem triangulum ABC, oppositum autem ipsi DEF. dico prisma ABCDEF dividi in tres pyramides æquales inter se, quæ triangulares habent bases. Jungantur enim BD EC CD. & quoniam parallelogrammum est ABED cujus diameter BD, erit ABD triangulum triangulo EBD ᵃ æquale. ergo pyramis cujus basis triangulum ABD, vertex autem punctum C, æqualis ᵇ est pyramidi, cujus basis EDB triangulum, & vertex punctum C. sed pyramis cujus basis EDB triangulum, & vertex punctum C, eadem est cum pyramide cujus basis triangulum EBC, & vertex D punctum: iisdem enim planis continentur. ergo & pyramis cujus basis triangulum ABD, vertex autem punctum C, æqualis est pyramidi cujus basis EBD triangulum, & vertex punctum D. rursus quoniam FCBE parallelogrammum est cujus diameter CE, triangulum ECF triangulo CBE est ᵃ æquale. ergo & pyramis cujus basis BEC triangulum, vertex autem punctum D, æqualis est ᵇ pyramidi cujus basis triangulum ECF, & vertex punctum D. sed pyramis cujus



ᵃ 34. primi.
ᵇ 5. hujus.

basis quidem B C E triangulum, vertex autem punctum D ostensa est æqualis pyramidi cujus basis triangulum A B D, & vertex C punctum. quare & pyramis cujus basis triangulum C E F, & vertex punctum D, æqualis est pyramidi cujus basis triangulum A B D, & vertex C punctum. prisma igitur A B C D E F dividitur in tres pyramides inter se æquales, quæ triangulares bases habent. Et quoniam pyramis cujus basis A B D triangulum, vertex autem punctum C, eadem est cum pyramide, cujus basis triangulum C A B, & vertex D punctum, iisdem namque planis continetur: pyramis autem, cujus basis triangulum A B D, & vertex punctum C, tertia pars ostensa est prismatis cujus basis A B C triangulum, & oppositum ipsi D E F: & pyramis igitur, cujus basis triangulum A B C, vertex autem D punctum, tertia pars est prismatis eandem basim habentis, videlicet A B C triangulum, & oppositum ipsi triangulum D E F. Quod demonstrare oportebat.



COROLL.

1. Ex hoc manifestum est omnem pyramidem tertiam partem esse prismatis basim habentis eandem, & altitudinem æqualem; quoniam si basis prismatis aliam quandam figuram rectilineam obtineat, & oppositam ipsi eandem; dividitur in prismata quæ trianngulares bases habent, basibusque opposita etiam triangula.

2. Prismata æque alta sunt inter se ut bases.

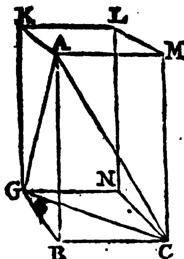
PROP. VIII. THEOR.

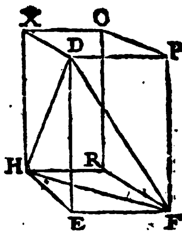
Similes pyramides quæ triangulares bases habent, in triplicata sunt proportione homologorum laterum.

Sint similes & similiter positæ pyramides, quarum bases quidem triangula A B C D E F, vertices autem G H puncta. dico A B C G pyramidem ad pyramidem D E F H, triplicatam proportionem habere ejus quam B C habet ad E F. Compleantur enim B G M L E H P O solida parallelepipeda. & quoniam pyramis A B C G similis est pyramidi D E F H, erit a angulus A B C angulo D E F æqualis, angulusque G B C æqualis angulo H E F, & angulus A B G angulo D E H. atque b est ut A B ad D E, ita B C ad E F, & B G ad E H. quoniam igitur est ut

a 9. Def. undecimi.
b 1. Def. sexti.

ut AB ad DE, ita BC ad EF, & circum æquales angulos latera sunt proportionalia, parallelogrammum BM parallelogrammo EP simile erit. eadem ratione, & parallelogrammum BN simile est parallelogrammo FR, & parallelogrammum BK ipsi EK parallelogrammo. tria igitur parallelogramma BM KB BN. tribus EP EX ER sunt similia. sed tria quidem MB BK BN tribus oppositis c æqualia & similia sunt, tria vero EP EX ER tribus oppositis æqualia & similia. quare solida BGML EHPO similibus planis & numero æqualibus continentur; ac propterea d simile est BGML solidum solido EHPO. similia autem solida parallelepipeda in e triplicata sunt proportione homologorum laterum. ergo solidum BHML ad solidum EHPO triplicatam habet porportionem ejus quam habet latus homologum BC ad EF homologum latus. sed f ut BGML solidum ad solidum EHPO, ita ABCG pyramis ad pyramidem DEFH; pyramis enim sexta pars est ipsius solidi, cum prisma quod est dimidium solidi parallelepipedi, sit pyramidis g triplum. quare & pyramis ABCG ad pyramidem DEFH triplicatam proportionem habebit ejus quàm BC habet ad EF. Quod demonstrare oportebat.





c 24. undecimi.

d 9. Def. undecimi.

e 33. undecimi.

f 15. quinti.

g 1. Cor. antecedentis.

Cor. Ex hoc perspicuum est, & similes pyramides quæ multangulas bases habent, inter se esse in triplicata proportione homologorum laterum. ipsis enim divisis in pyramides triangulares bases habentes: quoniam & similia polygona quæ sunt in basibus, in similia triangula dividuntur, & numero æqualia & homologa totis; erit ut una pyramis in una pyramide triangularem habens basim ad pyramidem in altera triangularem basim habentem, ita & omnes pyramides in una pyramide triangulares habentes bases ad omnes in altera triangulares bases habentes; hoc est, ita pyramis ipsa multangulam habens basim ad pyramidem quæ multangulam basim habet. sed pyramis triangularem habens basim ad pyramidem quæ triangularem basim habet, est in triplicata proportione homologorum laterum. & pyramis igitur polygonam habens basim ad pyramidem similem basim habentem, triplicatam proportionem habebit ejus quam latus homologum habet ad homologum latus.

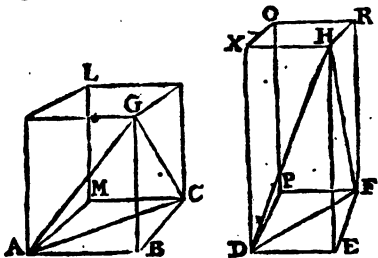
PROP. IX. THEOR.

Æqualium pyramidum, & triangulares bases habentium, bases & altitudines reciproce sunt proportionales: & quarum pyramidum triangulares bases habentium, bases & altitudines reciproce sunt proportionales, illæ sunt æquales.

Sint nempe pyramides æquales, quæ triangulares bases habeant ABC DEF, vertices vero G H puncta. dico pyramidum ABCG DEFH bases & altitudines reciprocari; scil. ut ABC basis ad basim DEF, ita esse pyramidis DEFH altitudinem ad altitudinem pyramis ABCG. Compleantur enim BGML EHPO solida parallelepipeda. & quoniam pyramis ABCG est æqualis pyramidi DEFH, atque est pyramidis quidem ABCG sextuplum BGML solidum, pyramidis vero DEFH sextuplum solidum EHPO; erit a solidum BGML solido EHPO æquale. æqualium autem solidorum parallelepipedorum bases & altitudines reciprocantur b. est igitur ut BM basis ad basim EP, ita EHPO solidi altitudo ad altitudinem solidi BGML. sed ut BM basis ad basim EP, ita a ABC triangulum ad triangulum DEF. ergo & ut ABC triangulum ad triangulum DEF, ita solidi EHPO altitudo ad altitudinem solidi BGML. sed solidi quidem EHPO altitudo eadem est cum altitudine pyramidis DEFH; solidi vero BGML altitudo eadem est cum altitudine pyramidis ABCG: est igitur ut ABC basis ad basim DEF, ita pyramidis DEFH altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG. quare pyramidum ABCG DEFH bases & altitudines reciproce sunt proportionales. Et si pyramidum ABCG DEFH bases & altitudines reciproce sunt proportionales, sitque ut ABC basis ad basim DEF, ita pyramidis DEFH altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG: dico ABCG pyramidem pyramidi DEFH æqualem esse. iisdem enim constructis, quoniam ut ABC basis ad basim DEF, ita est DEFH pyramidis altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG; ut autem ABC basis ad basim DEF, ita BM parallelogrammum ad parallelogrammum EP: erit & ut parallelogrammum BM ad EP parallelogrammum, ita pyramidis DEFH altitudo ad altitudinem

a 15. quinti.

b 34. undecimi.

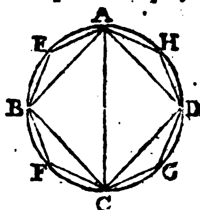


nem pyramidis ABCG. sed pyramidis quidem DEFH altitudo eadem est cum altitudine solidi parallelepipedi EHPO; pyramidis vero ABCG altitudo eadem est cum altitudine solidi parallelepipedi BGML: est igitur ut BM basis ad basim EP, ita EHPO solidi parallelepipedi altitudo ad altitudinem solidi parallelepipedi BGML. quorum autem solidorum parallelepipedorum bases & altitudines reciprocantur, ea c sunt aequalia. solidum igitur parallelepipedum BGML aequale est solido parallelepipedo EHPO. atque est solidi quidem BGML sexta pars pyramis ABCG: solidi vero EHPO itidem sexta pars pyramis DEFH. ergo pyramis ABCG pyramidi DEFH est aequalis. Aequalium igitur pyramidum, & triangulares bases habentium, bases & altitudines reciproce sunt proportionales: & quarum pyramidum triangulares bases habentium bases & altitudines reciproce sunt proportionales, illae sunt aequales. Quod oportebat demonstrare. c 34. undecimi.

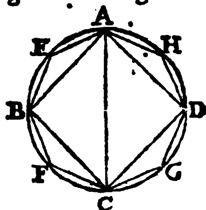
PROP. X. THEOR.

Omnis conus tertia pars est cylindri, qui eandem basim habet & altitudinem aequalem.

Habeat conus eandem basim quam cylindrus, videlicet circulum ABCD, & altitudinem aequalem. dico conum tertiam partem esse cylindri, hoc est cylindrum coni triplum esse. Si enim cylindrus non sit triplus coni, vel major erit quam triplus, vel minor. sit primo major quam triplus. & describatur in ABCD circulo quadratum ABCD. ergo quadratum ABCD majus est quam dimidium ABCD circuli. & à quadrato ABCD erigatur prisma aeque altum cylindro. quod quidem prisma majus erit quam cylindri dimidium; quoniam si circa circulum ABCD quadratum describatur, erit inscriptum quadratum dimidium circumscripti. & sint ab eisdem basibus erecta solida parallelepipeda aeque alta, nimirum prismata ipsa. quare prismata inter se sunt a ut bases. & prisma igitur erectum à quadrato ABCD dimidium est prismatis erecti à quadrato quod circa circulum ABCD describitur. atque est cylindrus minor prismate erecto à quadrato quod describitur circa circulum ABCD. prisma igitur erectum à quadrato ABCD aeque altum cylindro, dimidio cylindri est majus. secentur circumferentiae AB BC CD DA bifariam in punctis E F G H, & AE EB BF FC CG GD DH a 2. Cor. 7. hujus.



HA jungantur. unumquodque igitur triangulorum AEB BFC CGD DHA majus [b] est dimidio portionis circuli ABCD, in qua consistit. erigantur ab unoquoque triangulorum AEB EFC CGD DHA prismata æque alta cylindro. ergo & unumquodque erectorum prismatum majus est dimidio portionis cylindri quæ ad ipsum est. quoniam si per puncta E F G H parallelæ ipsis AB BC CD DA ducantur, & compleantur in ipsis AB BC CD DA parallelogramma, à quibus solida parallelepipeda æque alta cylindro erigantur: erunt uniuscujusque erectorum dimidia prismata ex [a] quæ sunt in triangulis AEB BFC CGD DHA. & sunt cylindri portiones erectis solidis parallelepipedis minores. ergo & prismata quæ in triangulis AEB BFC CGD DHA majora sunt dimidio portionum cylindri quæ ad ipsa sunt. itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, jungentesque rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes prismata æque alta cylindro, & hoc semper facientes, tandem relinquemus quasdam portiones cylindri quæ [c] minores erunt excessu, quo cylindrus coni triplum superat. relinquantur jam, & sint AE EB BF FC CG GD DH HA. reliquum igitur prisma, cujus basis quidem polygonum AEBFCGDH, altitudo autem eadem quæ cylindri, majus est quam triplum coni. sed prisma cujus basis AEBFCGDH polygonum, & altitudo eadem quæ cylindri, triplum [d] est pyramidis, cujus basis polygonum AEBFCGDH, vertex autem idem qui coni. & pyramis igitur cujus basis polygonum AEBFCGDH, vertex autem idem qui coni, major est cono qui basim habet ABCD circulum. sed & minor: (ab ipso enim comprehenditur.) quod fieri non potest. non igitur cylindrus major erit quam triplus coni. dico insuper neque cylindrum minorem esse quam triplum coni. Si enim fieri potest, sit cylindrus minor quam triplus coni. erit invertendo conus major quam tertia pars cylindri. describatur in ABCD circulo quadratum ABCD. ergo quadratum ABCD majus est quam dimidium ABCD circuli. & à quadrato ABCD erigatur pyramis, verticem habens eundem quem conus; pyramis igitur erecta major est quam coni dimidium: quoniam, ut ante demonstravimus, si circa circulum quadratum describatur, erit quadratum ABCD dimidium ejus quod circa circulum descriptum est: & si à quadratis erigantur solida parallelepipeda æque alta cono, quæ & prismata appellantur,

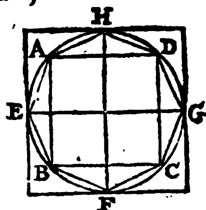


[b] ostenditur. ad 2. hujus.

[c] Lemma hujus.

[d] 1. Cor. 7. hujus.

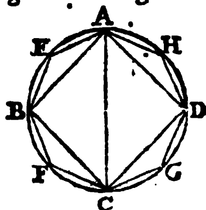
pellantur, erit a quod à quadrato A B C D erigitur, dimidium ejus, quod erectum est à quadrato circa circulum descripto; etenim inter se sunt ut bases. quare & tertiæ partes ipsarum. pyramis igitur cujus basis quadratum A B C D, dimidia est ejus pyramidis quæ à quadrato circa circulum descripto erigitur. sed pyramis erecta à quadrato descripto circa circulum, major est cono; ipsum namque comprehendit. ergo pyramis cujus basis A B C D quadratum, vertex autem idem qui coni, major est quam coni dimidium. secentur circumferentiæ A B B C C D D A bifariam in punctis E F G H. & jungantur A E E B B F F G C G G D D H H A. & unumquodque igitur triangulorum A E B B F C C G D D H A majus est quam dimidium portionis circuli A B C D, in qua consistit. erigantur ab unoquoque triangulorum A E B B F C C G D D H A pyramides verticem habentes eundem quem conus. ergo & unaquæque pyramidum eodem modo erectarum major est quàm dimidium portionis coni quæ est ad ipsam. itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, jungentesque rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides verticem habentes eundem quem conus, & hoc semper facientes, c relinquemus tandem quasdam coni portiones quæ minores erunt excessu quo conus tertiam cylindri partem superat. relinquantur; & sint quæ in ipsis A E E B B F F C C G G D D H H A. reliqua igitur pyramis cujus basis polygonum A E B F C G D H, & vertex idem qui coni, major est quam tertia cylindri pars. sed pyramis cujus basis polygonum A E B F C G D H, vertex autem idem qui coni, tertia pars est prismatis cujus basis polygonum A E B F C G D H, altitudo autem eadem quæ cylindri. prisma igitur cujus basis A E B F C G D H polygonum, & altitudo eadem quæ cylindri, majus est cylindro cujus basis est circulus A B C D. sed & minus: (ab ipso enim comprehenditur.) quod fieri non potest. non igitur cylindrus minor est quam triplus coni. ostensum autem est neque majorem esse quàm triplum. ergo cylindrus coni triplus sit necesse est; ac propterea conus tertia pars cylindri. Omnis igitur conus tertia pars est cylindri, eandem quam ipse basim habentis, & altitudinem æqualem. Quod demonstrare oportebat.



H A jungantur. unumquodque igitur triangulorum A E B
b ostenditur. B F C C G D D H A majus [b] est dimidio portionis circuli A B C D,
ad 2. hujus. in qua consistit. erigantur ab unoquoque triangulorum A E B B F C C G D D H A prismata æque alta cylindro. ergo & unumquodque erectorum prismatum majus est dimidio portionis cylindri quæ ad ipsum est. quoniam si per puncta E F G H parallelæ ipsis A B B C C D D A ducantur, & compleantur in ipsis A B B C C D D A parallelogramma, à quibus solida parallelepipeda æque alta cylindro erigantur: erunt uniuscujusque erectorum dimidia prismata ex [a] quæ sunt in triangulis A E B B F C C G D D H A. & sunt cylindri portiones erectis solidis parallelepipedis minores. ergo & prismata quæ in triangulis A E B B F C C G D D H A majora sunt dimidio portionum cylindri quæ ad ipsa sunt. itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, jungentesque rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes prismata æque alta cylindro, & hoc semper facientes, tandem relinquemus quasdam portiones cylindri quæ [c] minores erunt

c Lemma hujus.

excessu, quo cylindrus coni triplum superat. relinquantur jam, & sint A E E B B F F C C G G D D H H A. reliquum igitur

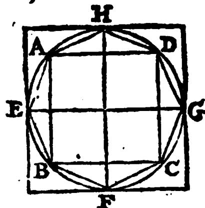


prisma, cujus basis quidem polygonum A E B F C G D H, altitudo autem eadem quæ cylindri, majus est quam triplum coni. sed prisma cujus basis A E B F C G D H polygonum, &

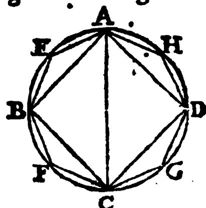
d 1. Cor. 7. hujus.

altitudo eadem quæ cylindri, triplum [d] est pyramidis, cujus basis polygonum A E B F C G D H, vertex autem idem qui coni. & pyramis igitur cujus basis polygonum A E B F C G D H, vertex autem idem qui coni, major est cono qui basim habet ABCD circulum. sed & minor: (ab ipso enim comprehenditur.) quod fieri non potest. non igitur cylindrus major erit quam triplus coni. dico insuper neque cylindrum minorem esse quam triplum coni. Si enim fieri potest, sit cylindrus minor quam triplus coni. erit invertendo conus major quam tertia pars cylindri. describatur in A B C D circulo quadratum A B C D. ergo quadratum A B C D majus est quam dimidium A B C D circuli. & à quadrato A B C D erigatur pyramis, verticem habens eundem quem conus; pyramis igitur erecta major est quam coni dimidium: quoniam, ut ante demonstravimus, si circa circulum quadratum describatur, erit quadratum A B C D dimidium ejus quod circa circulum descriptum est: & si à quadratis erigantur solida parallelepipeda æque alta cono, quæ & prismata appellantur,

pellantur, erit a quod à quadrato A B C D erigitur, dimidium ejus, quod erectum est à quadrato circa circulum descripto; etenim inter se sunt ut bases. quare & tertiæ partes ipsarum. pyramis igitur cujus basis quadratum A B C D, dimidia est ejus pyramidis quæ à quadrato circa circulum descripto erigitur. sed pyramis erecta à quadrato descripto circa circulum, major est cono; ipsum namque comprehendit. ergo pyramis cujus basis A B C D quadratum, vertex autem idem qui coni, major est quam coni dimidium. secentur circumferentiæ A B B C C D D A bifariam in punctis E F G H. & jungantur A E E B B F F G C G G D D H H A. & unumquodque igitur triangulorum A E B B F C C G D D H A majus est quam dimidium portionis circuli A B C D, in qua consistit. erigantur ab unoquoque triangulorum A E B B F C C G D D H A pyramides verticem habentes eundem quem conus. ergo & unaquæque pyramidum eodem modo erectarum major est quàm dimidium portionis coni quæ est ad ipsam. itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, jungentesque rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides verticem habentes eundem quem conus, & hoc semper facientes, c relinquemus tandem quasdam coni portiones quæ minores erunt excessu quo conus tertiam cylindri partem superat. relinquantur; & sint quæ in ipsis A E E B B F F C C G G D D H H A. reliqua igitur pyramis cujus basis polygonum A E B F C G D H, & vertex idem qui coni, major est quam tertia cylindri pars. sed pyramis cujus basis polygonum A E B F C G D H, vertex autem idem qui coni, tertia pars est prismatis cujus basis polygonum A E B F C G D H, altitudo autem eadem quæ cylindri. prisma igitur cujus basis A E B F C G D H polygonum, & altitudo eadem quæ cylindri, majus est cylindro cujus basis est circulus A B C D. sed & minus: (ab ipso enim comprehenditur.) quod fieri non potest. non igitur cylindrus minor est quam triplus coni. ostensum autem est neque majorem esse quàm triplum. ergo cylindrus coni triplus sit necesse est; ac propterea conus tertia pars cylindri. Omnis igitur conus tertia pars est cylindri, eandem quam ipse basim habentis, & altitudinem æqualem. Quod demonstrare oportebat.



HA jungantur. unumquodque igitur triangulorum AEB BFC CGD DHA majus b est dimidio portionis circuli ABCD, in qua consistit. erigantur ab unoquoque triangulorum AEB BFC CGD DHA prismata æque alta cylindro. ergo & unumquodque erectorum prismatum majus est dimidio portionis cylindri quæ ad ipsum est. quoniam si per puncta E F G H parallelæ ipsis AB BC CD DA ducantur, & compleantur in ipsis AB BC CD DA parallelogramma, à quibus solida parallelepipeda æque alta cylindro erigantur: erunt uniuscujusque erectorum dimidia prismata ex c quæ sunt in triangulis AEB BFC CGD DHA. & sunt cylindri portiones erectis solidis parallelepipedis minores. ergo & prismata quæ in triangulis AEB BFC CGD DHA majora sunt dimidio portionum cylindri quæ ad ipsa sunt. itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, jungentesque rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes prismata æque alta cylindro, & hoc semper facientes, tandem relinquemus quasdam portiones cylindri quæ minores erunt excessu, quo cylindrus coni triplum superat. relinquantur jam, & sint AE EB BF FC CG GD DH HA. reliquum igitur prisma, cujus basis quidem polygonum AEBFCGDH, altitudo autem eadem quæ cylindri, majus est quam triplum coni. sed prisma cujus basis AEBFCGDH polygonum, & altitudo eadem quæ cylindri, triplum d est pyramidis, cujus basis polygonum AEBFCGDH, vertex autem idem qui coni. & pyramis igitur cujus basis polygonum AEBFCGDH, vertex autem idem qui coni, major est cono qui basim habet ABCD circulum. sed & minor: (ab ipso enim comprehenditur.) quod fieri non potest. non igitur cylindrus major erit quam triplus coni. dico insuper neque cylindrum minorem esse quam triplum coni. Si enim fieri potest, sit cylindrus minor quam triplus coni. erit invertendo conus major quam tertia pars cylindri. describatur in ABCD circulo quadratum ABCD. ergo quadratum ABCD majus est quam dimidium ABCD circuli. & à quadrato ABCD erigatur pyramis, verticem habens eundem quem conus; pyramis igitur erecta major est quam coni dimidium: quoniam, ut ante demonstravimus, si circa circulum quadratum describatur, erit quadratum ABCD dimidium ejus quod circa circulum descriptum est: & si à quadratis erigantur solida parallelepipeda æque alta cono, quæ & prismata appellantur,

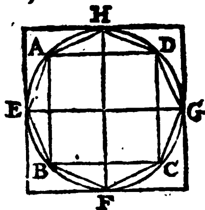


b ostenditur. ad 2. hujus.

c Lemma hujus.

d 1. Cor. 7. hujus.

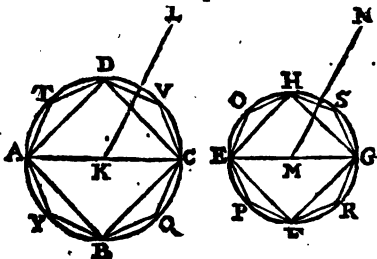
pellantur, erit *a* quod à quadrato A B C D erigitur, dimidium ejus, quod erectum est à quadrato circa circulum descripto; etenim inter se sunt ut bases. quare & tertiæ partes ipsarum. pyramis igitur cujus basis quadratum A B C D, dimidia est ejus pyramidis quæ à quadrato circa circulum descripto erigitur. sed pyramis erecta à quadrato descripto circa circulum, major est cono; ipsum namque comprehendit. ergo pyramis cujus basis A B C D quadratum, vertex autem idem qui coni, major est quam coni dimidium. secentur circumferentiæ A B B C C D D A bifariam in punctis E F G H. & jungantur A E E B B F F G C G G D D H H A. & unumquodque igitur triangulorum A E B B F C C G D D H A majus est quam dimidium portionis circuli A B C D, in qua consistit. erigantur ab unoquoque triangulorum A E B B F C C G D D H A pyramides verticem habentes eundem quem conus. ergo & unaquæque pyramidum eodem modo erectarum major est quàm dimidium portionis coni quæ est ad ipsam. itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, jungentesque rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides verticem habentes eundem quem conus, & hoc semper facientes, *c* relinquemus tandem quasdam coni portiones quæ minores erunt excessu quo conus tertiam cylindri partem superat. relinquantur; & sint quæ in ipsis A E E B B F F C C G G D D H H A. reliqua igitur pyramis cujus basis polygonum A E B F C G D H, & vertex idem qui coni, major est quam tertia cylindri pars. sed pyramis cujus basis polygonum A E B F C G D H, vertex autem idem qui coni, tertia pars est prismatis cujus basis polygonum A E B F C G D H, altitudo autem eadem quæ cylindri. prisma igitur cujus basis A E B F C G D H polygonum, & altitudo eadem quæ cylindri, majus est cylindro cujus basis est circulus A B C D. sed & minus: (ab ipso enim comprehenditur.) quod fieri non potest. non igitur cylindrus minor est quam triplus coni. ostensum autem est neque majorem esse quàm triplum. ergo cylindrus coni triplus sit necesse est; ac propterea conus tertia pars cylindri. Omnis igitur conus tertia pars est cylindri, eandem quam ipse basim habentis, & altitudinem æqualem. Quod demonstrare oportebat.



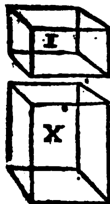
PROP. XI. THEOR.

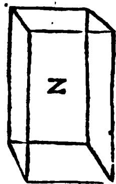
Coni & cylindri qui eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases.

Sint in eadem altitudine coni & cylindri, quorum bases circuli ABCD EFGH, axes autem KL MN, & diametri basium AC EG. dico ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita esse conum AL ad EN conum. Si enim non ita sit; erit ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad aliquod solidum minus cono EN, vel ad majus. sit primo ad minus quod sit X. & quo minus est solidum X cono EN, ei æquale sit I solidum. conus igitur EN ipsis solidis X I est æqualis. describatur in EFGH circulo quadratum EFGH, quod majus est dimidio circuli erigatur à quadrato EFGH pyramis æque alta cono. pyramis igitur erecta major est coni dimidio. nam si circa circulum quadratum describamus, & ab ipso erigamus pyramidem



æque altam cono; erit inscripta pyramis pyramidis circumscriptæ dimidium: etenim inter se [a] sunt ut bases. conus autem circumscripta pyramide est minor. ergo pyramis cujus basis quadratum EFGH, vertex autem idem qui coni, major est coni dimidio. secentur circumferentiæ EF FG GH HE bifariam in punctis P R S O; & OE EP PF FR RG GS SH HO jungantur. unumquodque igitur triangulorum HOE EPF FRG GSH majus est quam dimidium segmenti circuli in quo consistit. erigatur ab unoquoque triangulorum HOE EPF FRG GSH pyramis æque alta cono. ergo & unaquæque erectarum pyramidum major est dimidio portionis coni, quæ est ad ipsam. itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, & jungentes rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides æque altas cono, atque hoc semper facientes, [b] relinquemus tandem aliquas portiones coni, quæ solido I minores erunt. relinquantur, & sint quæ in ipsis HO OE EP PF FR RG GS SH.





[a] 6. hujus.

[b] Lemma hujus.

SH. reliqua igitur pyramis cujus basis polygonum HOEPFRGS, altitudo autem eadem quæ coni, major est solido X. describatur in circulo ABCD polygono HOEPFRGS simile & similiter positum polygonum DTAYBQCV, & ab ipso erigatur pyramis æque alta cono AL. quoniam igitur est ut quadratum ex AC ad quadratum ex FG, ita [c] DTAYBQCV polygonum ad polygonum HOEPFRGS; ut autem quadratum ex AC ad quadratum ex EG, ita ABCD circulus [d] ad circulum EFGH: erit ut ABCD circulus ad circulum EFGH, [e] ita polyognum DTAYBQCV ad polygonum HOEPFRGS. sed ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad X solidum: & ut polygonum DTAYBQCV ad polygonum HOEPFRGS, [a] ita pyramis cujus basis DTAYBQCV polygonum, vertex autem punctum L, ad pyramidem cujus basis polygonum HOEPFRGS, & vertex punctum N. ita igitur conus AL ad X solidum, ita pyramis, cujus basis polygonum DTAYBQCV, & vertex punctum L, ad pyramidem cujus basis polygonum HOEPFRGS, & vertex N punctum. conus autem AL major est pyramide quæ est in ipso. majus igitur est solidum X pyramide quæ est in cono EN. sed & ostensum est minus. quod fieri non potest. non igitur ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita est AL conus ad solidum aliquod minus cono EN. similiter demonstrabitur neque ut EFGH circulus ad circulum ABCD, ita esse conum EN ad aliquod solidum minus cono AL. dico præterea neque esse ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita AL conum ad aliquod solidum majus cono EN. Si enim fieri potest, sit ad solidum majus, quod sit Z. ergo invertendo ut EFGH circulus ad circulum ABCD ita erit solidum Z ad AL conum. sed cum sit solidum Z majus cono EN; erit ut solidum Z ad AL conum, ita conus EN ad aliquod solidum minus cono AL. & igitur ut EFGH circulus ad circulum ABCD, ita conus EN ad aliquod solidum minus cono AL, quod fieri non posse ostensum est. non igitur ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad aliquod solidum majus cono EN. ostensum autem est neque esse ad minus. ergo ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita est conus AL ad EN conum. sed ut conus ad conum, ita [f] est cylindrus ad cylindrum; est enim uterque utriusque [g] triplus. & igitur ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita in ipsis cylindri æque alti conis. Ergo coni & cylindri qui eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases. Quod demonstrare oportebat.

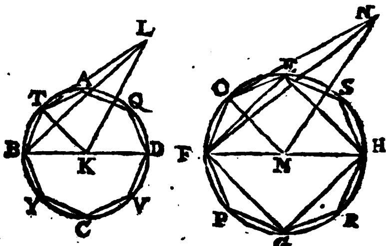
[c] 1. hujus.
[d] 2. hujus.
[e] 11. quinti.
[f] 15. quinti.
[g] 10. hujus.

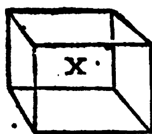
PROP.

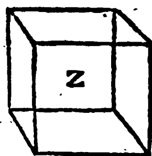
PROP. XII. THEOR.

Similes coni & cylindri inter se sunt in triplicata proportione diametrorum quæ sunt in basibus.

Sint similes coni & cylindri, quorum bases quidem circuli ABCD EFGH, diametri vero basium BD FH, & axes conorum vel cylindorum KL MN. dico conum cujus basis ABCD circulus, vertex autem punctum L, ad conum cujus basis circulus EFGH, vertex autem N punctum, triplicatam habere proportionem ejus quam habet BD ad FH. Si enim non habet conus ABCDL ad conum EFGHN triplicatam proportionem ejus quam BD habet ad FH, habebit ABCDL conus ad aliquod solidum minus cono EFGHN triplicatamproportionem, vel, ad majus. Habeat primo ad minus, quod sit X. & describatur in EFGH. circulo quadratum EFGH. quadratum igitur EFGH majus est dimidio EFGH circuli. & erigatur à quadrato EFGH pyramis æque alta cono. ergo erecta pyramis major est quam coni dimidium. itaque secentur EF FG GH HE circumferentiæ bifariam in punctis O P R S, & jungantur EO OF FP PG GR RH HS SE. unumquodque igitur triangulorum EOF FPG GRH HSE majus est dimidio segmenti circuli EFGH, in quo consistit. & erigatur ab unoquoque triangulorum EOF FPG GRH HSE pyramis eundem verticem habens quem conus. ergo & unaquæque erectarum pyramidum major est quam dimidium portionis coni, quæ est ad ipsam., secantes igitur reliquas circumferentias bifariam, jungentesque rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides eundem habentes verticem quem conus, atque hoc semper facientes, [a] tandem relinquemus quasdam coni portiones quæ minores erunt excessu quo conus EFGHN ipsum X solidum superat. relinquantur, & sint quæ in ipsis EO OF FP PG GR RH HS SE. reliqua igitur pyramis cujus basis quidem polygonum







[a] Lemma hujus.

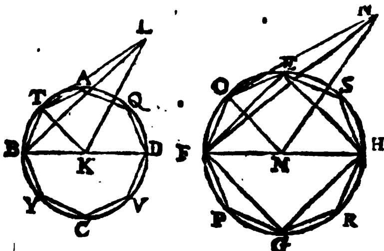
EOFP

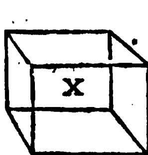
EOFPGRHS, vertex autem N punctum, major est solido X. describatur etiam in circulo ABCD, polygono EOFPGRHS simile & similiter positum polygonum ATBYCVDQ: à quo erigatur pyramis eundem verticem habens quem conus: & triangulorum continentium pyramidem cujus basis quidem est polygonum ATBYCVDQ, vertex autem punctum L, unum sit LBT; triangulorum vero continentium pyramidem cujus basis EQFPGRHS polygonum, & vertex punctum N, unum sit NFO: & jungantur KT MO. quoniam igitur conus ABCDL similis est cono EFGHN, erit [b] ut BD ad FH, ita KL axis ad axem MN, ut autem BD ad FH, [c] ita BK ad FM. itaque ut BK ad FM ita KL ad MN: & permutando ut BK ad KL, ita FM ad MN. & cum perpendicularis utraque est, & circa æquales angulos BKL FMN latera sunt proportionalia: simile igitur [d] est BKL triangulum triangulo FMN. Rursus quoniam est ut BK ad KT, ita FM ad MO, & circa æquales angulos BKT FMO latera sunt proportionalia; etenim quæ pars est angulus BKT quatuor rectorum qui sunt ad K centrum, eadem est pars & angulus FMO quatuor rectorum qui sunt ad centrum M: erit [d] triangulum BKT triangulo FMO simile. & quoniam ostensum est ut BK ad KL, ita esse FM ad MN; æqualis autem est BK ipsi KT, & FM ipsi MO: erit ut TK ad KL, ita OM ad MN: & circa æquales angulos TKL OMN latera sunt proportionalia; recti enim sunt: triangulum igitur LKT simile est triangulo MNO. quod cum ob similitudinem triangulorum BKL FMN, sit ut LB ad BK, ita NF ad FM; ob similitudinem vero triangulorum BKT FMO, ut KB ad BT, ita MF ad FO: erit ex æquali ut LB ad BT, ita NF ad FO. rursus cum ob similitudinem triangulorum LTK NOM, sit ut LT ad TK, ita NO ad OM; & ob similitudinem triangulorum KBT OMF, ut KT ad TB, ita MO ad OF: ex æquali erit ut LT ad TB, ita NO ad OF, ostensum autem est & ut TB ad BL, ita OF ad FN. quare rursus ex æquali ut TL ad LB, ita ON ad NF. triangulorum igitur LTB NOF proportionalia sunt latera, ideoque æquiangula sunt LTB NOF triangula, & inter se [e] similia. quare & pyramis cujus basis triangulum BKT, vertex autem L punctum, similis est pyramidi cujus basis FMO triangulum, & vertex punctum N; similibus enim planis continentur, & multitudine æqualibus. pyramides autem similes, & quæ triangulares bases habent, in [f] triplicata sunt proportione homologorum laterum. ergo pyramis BKTL ad pyramidem FMON triplicatam habet proportionem ejus quam BK habet ad FM similiter à punctis quidem A Q D V C Y ad K, à punctis vero E S H R G P ad M ducentes rectas lineas

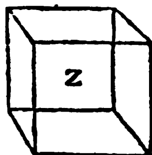
[b] 24. Def. undecimi.
[c] 15 quinti.
[d] 6. sexti.
[e] 5. sexti.
[f] 8. hujus.

lineas, & à triangulis erigentes pyramidem vertices eosdem habentes quos coni, ostendemus & unamquamque pyramidum ejusdem ordinis ad unamquamque alterius ordinis triplicatam proportionem habere ejus quam habet B K latus ad homologum latus M F, hoc est quam B D ad F H. sed ut unum antecedentium *g* ad unum consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia. est igitur & ut B K T L pyramis ad pyramidem F M O N, ita tota pyramis cujus basis A T B Y C V D Q polygonum, vertex autem punctum L, ad totam pyramidem cujus basis polygonum E O F P G R H S, & vertex punctum N. quare & pyramis cujus basis A T B Y C V D Q polygonum, vertex autem punctum L, ad pyramidem cujus basis polygonum, E O F P G R H S, & vertex punctum N, triplicatam proportionem habet ejus quam B D habet ad F H. ponitur autem conus cujus basis circulus A B C D vertex autem punctum L, ad solidum X triplicatam proportionem habere ejus quam B D ad F H. ut igitur conus cujus basis circulus A B C D, vertex autem punctum L, ad solidum X, ita est pyramis cujus basis A T B Y C V D Q polygonum, vertex autem punctum L, ad pyramidem cujus basis polygonum E O F P G R H S, & vertex punctum N. dictus autem conus major est pyramide quæ in ipso; etenim eam comprehendit. majus igitur est & solidum X pyramide cujus basis polygonum E O F P G R H S, vertex autem punctum N. sed & minus. quod fieri non potest. non igitur conus cujus basis A B C D circulus, & vertex punctum L, ad aliquod solidum minus cono cujus basis circulus E F G H, & vertex N punctum, triplicatam proportionem habet ejus quam B D habet ad F H. similiter demonstrabimus neque conum E F G H N ad aliquod solidum minus cono A B C D L triplicatam proportionem habere ejus quam habet F H ad B D, itaque dico neque A B C D L conum ad solidum majus cono E F G H N triplicatam habere proportionem ejus quam B D habet ad F H. Si enim fieri potest, habeat ad aliquod solidum majus, quod sit Z. invertendo

g 12. quinti.





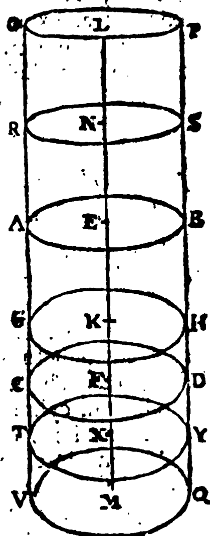


vertendo igitur, solidum Z ad conum ABCDL triplicatam proportionem habet ejus quam FH ad BD. cum autem est solidum Z majus cono EFGHN; erit ut solidum Z ad conum ABCDL, ita EFGHN conus ad aliquod solidum minus cono ABCDL. ergo & conus EFGHN ad solidum aliquod minus cono ABCDL triplicatam proportionem habebit ejus quam FH habet ad BD, quod fieri non posse demonstratum est. non igitur ABCDL conus ad solidum aliquod majus cono EFGHN, triplicatam proportionem habet ejus quam BD ad FH. ostensum autem est neque ad minus. quare conus ABCDL ad EFGHN conum triplicatam proportionem habet ejus quam BD ad FH. ut autem conus ad conum, ita [b] cylindrus ad cylindrum. cylindrus enim in eadem existens basi in qua conus, & ipsi æque altus, coni [i] triplus est, cum ostensum sit, omnem conum tertiam partem esse cylindri eandem quam ipse basim habentis, & æqualem altitudinem. ergo & cylindrus ad cylindrum triplicatam proportionem habebit ejus quam BD habet ad FH. Similes igitur coni & cylindri inter se sunt in triplicata proportione diametrorum quæ sunt in basibus. Quod demonstrare oportebat.

[b] 15. quinti.
[i] 10. hujus.

PROP. XIII. THEOR.

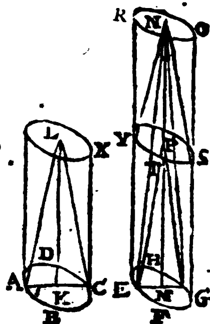
Si cylindrus plano secetur oppositis planis parallelo, erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.



Cylindrus enim AD plano GH secetur oppositis planis AB CD parallelo, & occurrat axi EF in K puncto. dico ut BG cylindrus ad cylindrum GD, ita esse EK axem ad axem KF. Producatur enim EF axis ex utraque parte ad puncta L, M; & ipsi quidem EK axi ponantur æquales quotcunque EN NL; ipsi vero FK æquales quotcunque FX XM: & per puncta L N X M ducantur plana ipsis AB, CD parallela: atque in planis per L N X M circa centra L N X M intelligantur circuli OP RS TY VQ æquales ipsi AB CD; & cylindri PR RB DT TQ intelligantur. quoniam igitur axes LN NE EK inter se sunt æquales, erunt cylindri PR RB BG inter se [a] ut bases. æquales autem sunt bases. ergo & cylindri PR RB BG sunt æquales. quod cum axes LN NE EK inter se

[a] 11. hujus.

b 13. hujus. drum b, ita MN altitudo ad altitudinem MP; nam cylindrus EO secatur plano TYS, oppositis planis parallelo. est igitur ut ABCD basis ad basim EFGH, ita altitudo MN ad MP altitudinem. æqualis autem est MP altitudo altitudini KL. quare ut basis ABCD ad EFGH basim, ita MN altitudo ad altitudinem KL. æqualium igitur cylindrorum AX EO bases & altitudines reciproce sunt proportionales.

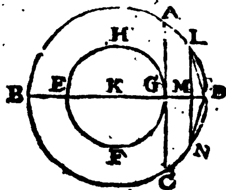


Sed si cylindrorum AX EO bases & altitudines sunt reciproce proportionales: hoc est, ut ABCD basis ad basim EFGH, ita altitudo MN ad KL altitudinem. dico AX cylindrum cylindro EO æqualem esse. Iisdem enim constructis; quoniam ut ABCD basis ad basim EFGH, ita altitudo MN ad KP altitudinem; altitudo autem KL æqualis est altitudini MP: erit ut ABCD basis ad basim EFGH, ita MN altitudo ad altitudinem MP. c 11. hujus. sed ut ABCD basis ad basim EFGH, c ita AX cylindrus ad cylindrum ES; eandem enim habent altitudinem: ut autem MN altitudo ad altitudinem MP, ita b cylindrus EO ad ES cylindrum. est igitur ut AX cylindrus ad cylindrum ES, ita cylindrus EO ad ES cylindrum. cylindrus igitur AX cylindro EO est d æqualis. d 9. quinti. similiter autem & in conis. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XVI. THEOR.

Duobus circulis circa idem centrum exstentibus, in majori polygonum æqualium & numero parium laterum describere, quod minorem circulum non tangat.

Sint dati duo circuli ABCD EFGH circa idem centrum K. oportet in majori circulo ABCD polygonum æqualium & numero parium laterum describere, non tangens minorem circulum EFGH. Ducatur per K centrum recta linea BD, atque à puncto G ipsi BD ad rectos angulos ducatur AG, & ad C producatur, quæ a 16. tertii. AC circulum EFGH a tanget.



Itaque circumferentiam BAD bifariam secantes, & ejus dimidium rursus bifariam, & hoc semper facientes, b tandem re- b Lemma hujus. linquemus

linquemus circumferentiam minorem ipsa A D. relinquatur sitque L D: & à puncto L ad B D perpendicularis [c] agatur L M, [c 12. primi.] & ad N producatur; junganturque L D D N. ergo L D ipsi D N est [d] æqualis, & quoniam L N parallela est A C, & A C [d 3. & 29. tertii.] tangit circulum E F G H; ipsa L N circulum E F G H non tanget. & multo minus tangent circulum E F G H rectæ lineæ L D D N. quod si ipsi L D æquales deinceps circulo A B C D aptabimus, describetur in eo polygonum æqualium & numero parium laterum non tangens minorem circulum E F G H. Quod facere oportebat.

PROP. XVII. PROBL.

Duabus sphæris circa idem centrum existentibus, in majori solidum polyhedrum describere, quod minoris sphæræ superficiem non tangat.

Intelligantur duæ sphæræ circa idem centrum A. oportet in majori sphæra describere solidum polyhedrum minoris sphæræ superficiem non tangens: Secentur sphæræ plano aliquo per centrum ducto: sectiones erunt circuli; quoniam diametro manente & semicirculo circumducto sphæra facta [a] est: ergo in quacunque positione semicirculum intelligamus, quod per ipsum producitur planum in superficie sphæræ [a Def. 14. undecimi.] circulum efficiet; & constat circulum esse maximum, cum diameter sphæræ quæ & semicirculi diameter est; major [b] sit om- [b 15. tertii.] nibus rectis lineis quæ in circulo vel sphæra ducuntur. sit igitur in majori quidem sphæra circulus B C D E, in minori autem circulus F G H; & ducantur ipsorum duæ diametri ad rectos inter se angulos B D C E. occurrat B D minori circulo in G; ducatur à puncto G ipsi A G ad rectos angulos G L, & jungatur A L. itaque circumferentiam E B bifariam secantes, & dimidium ipsius bifariam, atque hoc semper facientes, tandem relinquemus quandam circumferentiam minorem ea parte circumferentiæ circuli B C D, quæ subtenditur à recta æquali ipsi G L. relinquatur, sitque circumferentia B K. minor igitur est recta B K quam G L; eritque B K latus polygoni æqualium & parium numero laterum non tangentis minorem circulum. sint igitur polygoni latera in quadrante circuli B E, rectæ B K K L L M M E; & puncta K A producantur ad N: & à puncto A plano circuli B C D E ad rectos angulos [c] constituatur A X, quæ superficiei sphæræ in puncto X oc- [c 12. undecimi.] currat, & per A X & utramque ipsarum B D K N plana ducantur, quæ ex jam dictis efficient in superficie sphæræ maximos circulos. itaque efficiant, & sint in diametris B D

KN eorum semicirculi BXD KXN. quoniam igitur XA recta est ad planum circuli BCDE, erunt omnia plana quæ per ipsam XA transeunt, ad idem circuli planum ^{d} recta: quare & semicirculi BXD KXN recti sunt ad idem planum. & quoniam semicirculi BED BXD KXN æquales sunt in æqualibus enim consistunt BD KN diametris; erunt & eorum quadrantes BE BX KX inter se æquales. quot igitur latera polygoni sunt in quadrante BE, tot erunt & in quadrantibus BX KX, æqualia ipsis BK KL LM ME. describantur, & sint BO OP PR RX, KS ST TY YX: junganturque SO TP YR; & ab ipsis OS ad planum circuli BCDE perpendiculares ducantur. cadent hæ in ^{e} communes planorum sectiones BD KN, quoniam & plana semicirculorum BXD KXN ad planum circuli BCDE recta sunt. itaque cadant, sintque OV SQ, & VQ jungatur. cum igitur in æqualibus semicirculis BXD KXN, æquales circumferentiæ sumptæ sint BO KS, & ductæ perpendiculares OV SQ, erit OV quidem ipsi SQ æqualis, BV vero æqualis KQ. est autem & tota BA æqualis toti KA. ergo & reliqua VA reliquæ QA est æqualis. igitur ut BV ad VA, ita KQ ad QA: ideoque VQ ipsi BK parallela ^{f} est. quod cum utraque ipsarum OV SQ recta sit ad circuli BCDE planum, erit

d 18. undecimi.

e 38. undecimi.

f 2. sexti.

erit OV ipsi SQ [g] parallela. ostensa autem est & ipsi æqualis. ergo QV SO æquales [h] sunt & parallelæ. & quoniam QV parallela est ipsi SO, sed & parallela ipsi KB; erit & [i] SO ipsi KB parallela: & ipsas conjungunt BO KS. ergo & KBOS quadrilaterum est in uno [k] plano: nam si duæ rectæ lineæ parallelæ sint, & in utraque ipsarum quævis puncta sumantur, quæ dicta puncta conjungit recta linea in eodem est plano, in quo parallelæ. & eadem ratione utraque ipsorum quadrilaterorum SOPT TPRY in uno sunt plano. est autem in [l] uno plano & triangulum YRX. si igitur à punctis OSPTRY ad A ductas rectas lineas intelligamus, constituetur quædam figura solida polyhedra inter circumferentias BX KX, ex pyramidibus, composita, quarum bases quidem KBOS SOPT TPRY quadrilatera, & triangulum YRX; vertex autem punctum A. quòd si in unoquoque latere KL LM ME, quemadmodum in KB eadem construamus, & in reliquis tribus quadrantibus, & in reliquo hemisphærio, constituetur figura quædam polyhedra in sphæra descripta, & composita ex pyramidibus, quarum bases sunt quadrilatera jam dicta, & YRX triangulum, & quæ ejusdem ordinis sunt, vertex autem A punctum. dico dictam figuram polyhedram non tangere superficiem minoris sphæræ, in qua est circulus FGH. Ducatur à [m] puncto A ad planum quadrilateri KBSO perpendicularis AZ, cui in puncto Z occurat, & BZ ZK jungantur. itaque quoniam AZ recta est ad quadrilateri KBSO planum, & ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt, & in eodem sunt plano [n] rectos angulos faciet: ergo AZ ad utramque ipsarum BZ ZK est perpendicularis. & quoniam AB est æqualis AK, erit & quadratum ex AB quadrato ex AK æquale: & sunt quadrato quidem ex AB æqualia [o] quadrata ex AZ ZB, angulus enim ad Z rectus est; quadrato autem ex AK æqualia ex AZ ZK quadrata. ergo quadrata ex AZ ZB quadratis ex AZ ZK æqualia sunt. commune auferatur quadratum ex AZ. reliquum igitur quod ex BZ reliquo quod ex ZK est æquale: ergo recta BZ rectæ ZK æqualis. Similiter ostendemus, & quæ à puncto Z ad puncta O S ducuntur utrique ipsarum BZ ZK æquales esse. circulus igitur centro Z & intervallo una ipsarum ZB ZK descriptus etiam per puncta O S transibit. & quoniam in circulo est BKSO quadrilaterum, & sunt æquales OB BK KS & minor OS, erit angulus BZK obtusus; ideoque BK major quam BZ. sed & GL quam BK est major multo. igitur major est GL quam BZ. & quadratum ex GL quadrato ex BZ majus. & cum æqualis AL ipsi AB, erit quadratum ex AL quadrato ex AB æquale:

[g] 6. undecimi.
[h] 33. primi.
[i] 9. undecimi.
[k] 7. undecimi.
[l] 2. undecimi.
[m] 11. undecimi.
[n] 3. Def. undecimi.
[o] 47. primi.

 sed

ſed quadrato quidem ex AL æqualia ſunt quadrata ex AG GL, quadrato autem ex AB æqualia quadrata ex BZ ZA; quadrata igitur ex AG GL æqualia ſunt quadratis ex BZ ZA; quorum quadratum ex BZ minus eſt quadrato ex GL: ergo reliquum ex ZA quadratum majus eſt quadrato ex AG;

& ob id recta linea ZA major eſt recta AG. atque eſt AZ quidem ad unam polyhedri baſim, AG vero ad ſuperficiem minoris ſphæræ perpendicularis. quare polyhedrum minoris ſphæræ ſuperficiem non tanget. Duabus igitur ſphæris circa idem centrum exiſtentibus, in majori ſolidum deſcriptum eſt minoris ſphæræ ſuperficiem non tangens. Quod facere oportebat.

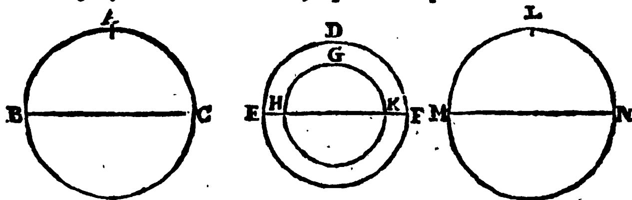
Cor. Quod ſi etiam in altera ſphæra ſolido polyhedro deſcripto, in ſphæra BCDE ſimile ſolidum polyhedrum deſcribatur; habebit ſolidum polyhedrum in ſphæra BCDE ad ſolidum polyhedrum in altera ſphæra triplicatam proportionem ejus, quam diameter ſphæræ BCDE habet ad alterius ſphæræ diametrum. diviſis enim ſolidis in pyramides numero æquales, & ejuſdem ordinis: erunt pyramides ſimiles. ſimiles autem pyramides inter ſe in triplicata ſunt proportione homologorum laterum. ergo pyramis cujus baſis eſt KBOS quadrilaterum, vertex autem punctum A, ad pyramidem in altera ſphæra ejuſdem ordinis triplicatam proportionem habet ejus, quam latus homologum habet ad homolo-

homologum latus; hoc est, quam habet A B ex centro sphæræ circa centrum A existentis, ad eam, quæ est ex centro alterius sphæræ. similiter & unaquæque pyramis earum, quæ sunt in sphæræ circa centrum A, ad unumquamque pyramidum ejusdem ordinis, quæ sunt in altera sphæra, triplicatam proportionem habebit ejus, quam habet A B ad eam, quæ est ex centro alterius sphæræ. Et ut unum antecedentium ad unum consequentium, ita antecedentia omnia ad omnia consequentia. quare totum solidum polyhedrum, quod est in sphæra circa centrum A, ad totum solidum polyhedrum, quod in altera sphæra, triplicatam proportionem habebit ejus, quam habet A B ad eam quæ est ex centro alterius sphæræ, hoc est, quam habet B D diameter ad alterius sphæræ diametrum.

PROP. XVIII. THEOR.

Sphæræ inter se in triplicata sunt proportione suarum diametrorum.

Intelligantur sphæræ A C D D E F; quarum diametri B C E F. dico A B C sphæram ad sphæram D E F triplicatam proportionem habere ejus, quam habet B C ad E F. Si enim non ita est, sphæra A B C ad sphæram minorem ipsa D E F, vel ad majorem, triplicatam proportionem habebit ejus, quam habet B C ad E F. Habeat primo ad minorem, videlicet ad G H K. & intelligatur sphæra D E F circa idem centrum, circa quod sphæra G H K: describaturque in majori sphæra D E F solidum polyhedrum non tangens [a] minorem sphæram G H K in superficie; & in sphæra A B C describatur solidum polyhedrum simile ei, quod in sphæra D E F descri- [a] 17. hujus.



ptum est. solidum igitur polyhedrum, quod in sphæra A B C, ad solidum polyhedrum, quod in sphæra D E F, triplicatam [b] proportionem habet ejus, quam B C ad E F. habet autem A B C sphæra ad sphæram G H K triplicatam proportionem ejus, quam B C ad E F. ergo ut A B C sphæra ad sphæram G H K, ita solidum polyhedrum in sphæra A B C ad solidum polyhedrum in sphæra D E F; & permutando, ut A B C [b] Cor. antecedente.

 sphæra

sphæra ad solidum polyhedrum, quod in ipsa est, ita GHK sphæra ad solidum polyhedrum, quod in sphæra DEF. major autem est sphæra ABC solido polyhedro, quod est in ipsa. ergo & GHK sphæra polyhedro, quod in sphæra DEF, est major. sed & minor, ab ipso enim comprehenditur, quod fieri non potest. non igitur ABC sphæra ad sphæram minorem ipsa DEF triplicatam proportionem habet ejus, quam BC ad EF. similiter ostendemus neque DEF sphæram ad sphæram minorem ipsa ABC triplicatam habere proportionem ejus, quam habet EF ad BC. dico insuper sphæram ABC neque ad majorem sphæram ipsa DEF triplicatam proportionem habere ejus, quam BC ad EF. Si enim fieri potest, habet ad majorem LMN. invertendo igitur, sphæra LMN ad ABC sphæram triplicatam proportionem habet ejus, quam diameter EF ad BC diametrum. ut autem sphæra LMN ad ABC sphæram, ita sphæra DEF ad sphæram quandam minorem ipsa ABC, quoniam sphæra LMN major est ipsa DEF. ergo & DEF spηæra ad sphæram minorem ipsa ABC triplicatam proportionem habet ejus, quam EF ad BC; quod fieri non posse ostensum est. non igitur ABC sphæra ad sphæram majorem ipsa DEF triplicatam proportionem habet ejus, quam BC ad EF. ostensum autem est neque ad minorem. ergo ABC sphæra ad sphæram DEF triplicatam proportionem habebit ejus, quam BC ad EF. Quod demonstrare oportebat.

FINIS.

LIBLI *Venales apud* Richardum Clements *Bibliopolam* Oxoniensem.

ROgeri Aschami Epistolarum Libri Quatuor cui accessit Joannis Saturmii aliorumque ad Aschamum Anglosque Eruditos Epistolarum Liber unus 8vo. Oxoniæ 1703.

Spicilegium SS. Patrum ut & Hæreticorum Seculi post Christum Natum 1. 2. 3. Cura Joannis Ernesti Grabii Editio Altera Auctior 2 vol. 8vo. Oxon. 1714.

M. Fab. Quintilliani Declamationum Liber 8vo. 1692.

C. Suetonii Tranquilli opera omnia notis Illustrata Oxonii. 1676.

Theodosii Sphæricorum Libri Tres. G. Lat. 8vo. Oxon. 1707.

Græcæ Linguæ Dialecti, in usum Scholæ Westmonasteriensis. Opera ac studio Mich. Maittaire A. M. Londini 1712. 8vo.

Caspari Bartholini Specimen Philosophiæ Naturalis accedit de Fontium Fluviorumque Origine 12mo. 1713.

Smith Aditus ad Logicam, & Elementa Logicæ Oxoniæ 1694.

Liberti Fromondi Meterrologicorum Libri sex Londini 1670.

DuTrieu manuductio ad Logicam Oxoniæ 8vo. 1678.

Mocket de Politiâ Ecclesiæ Anglicanæ. Londini 1705.

TRIGONOMETRIÆ
Planæ & Sphæricæ
ELEMENTA.

ITEM

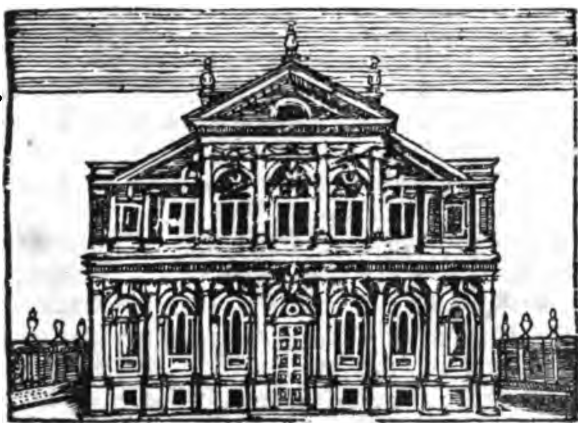
DE NATURA

ET

ARITHMETICA

LOGARITHMORUM

TRACTATUS BREVIS.



OXONIÆ,

E THEATRO SHELDONIANO MDCCXXXI.

Impensis *Ric. Clements* Bibliop. *Oxoniensis*.

TRIGONOMETRIÆ
Planæ & Sphæricæ
ELEMENTA.

DEFINITIONES.

EX datis Trianguli lateribus angulos, & ex angulis latera laterumve rationes, & mixtim assequi, Trigonometriæ munus est. Ad quod præstandum, necesse est, ut non tantum Peripheriæ circulares, sed & rectæ lineæ circulis adscriptæ, in notas aliquot & certas partes secari supponantur.

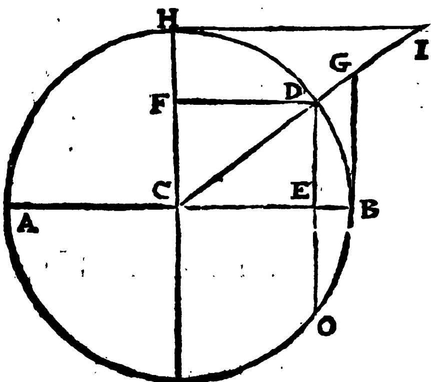
Placuit itaque Veteribus Mathematicis, peripheriam circuli in 360 partes (quos gradus appellant) dividere; & unumquemque gradum in 60 minuta prima, & hæc singula in 60 secunda, & rursus horum unumquodque in 60 minuta Tertia, & ita continuo partiri. Et angulus quilibet dicitur esse tot graduum & minutorum, quot sunt in arcu qui angulum illum metitur.

Quidam gradum in partes centesimas, potius quam sexagesimas partiri volunt: & utilius fortasse esset, non gradus sed & ipsum circulum in decupla ratione secare; quæ divisio forsan aliquando obtinebit. Verum si circulus constet 360 gradibus, ejus quadrans quæ est mensura anguli recti, erit harum partium 90. Si circulus in 100 partes secetur, Quadrans erit 25 partium.

Complementum Arcus, est differentia ejus à Quadrante.

Chorda sive *subtensa* est recta linea ab uno Arcûs termino ad alterum ducta.

Sinus rectus alicujus arcus qui & simpliciter sinus dici solet, est perpendicularis cadens ab uno arcus termino ad radium per alterum terminum ejusdem Arcus ductum. Est igitur semisubtensa dupli Arcus; scil. est DE $= \frac{1}{2}$ DO, & est arcus DO duplus ipsius DB. Hinc sinus arcus 30. gr. æqualis est dimidio radii, nam per 15 El. 4. Latus Hexagoni circulo inscripti, hoc est, subtensa 60 gr. æqualis est radio. Sinus dividit Radium in duo segmenta CE EB; quorum unum CE quod centro & sinu recto intercipitur, est sinus complementi arcûs DB ad quadrantem (nam est CE $=$ FD qui est sinus arcus DH) & vocatur *cosinus*. Alterum segmentum BE quod sinu recto & peripheria intercipitur, vocatur *sinus versus*: aliquando dicitur Arcûs *sagitta*.



Quod si per unum Arcus terminum D producatur à centro recta CG, donec occurrat rectæ BG super diametro ad ejus terminum B perpendiculari; vocabitur in Trigonometria CG *Secans*, & BG *Tangens* arcus DB.

Cosecans & Cotangens Arcûs est secans vel tangens Arcus, qui est complementum alterius ad Quadrantem. *Nota*. Sicut eadem est Chorda Arcûs & ejusdem complementi ad semicirculum. Sic idem est sinus, eadem Tangens, eademque secans Arcûs & ejusdem complementi ad semicirculum.

Sinus Totus est sinus maximus, seu sinus 90 graduum qui circuli radio æqualis est.

Canon Trigonometricus est Tabula, quæ à minuto incipiens, seriatim exhibet quas habent longitudines singuli sinus Tangentes & Secantes, respectu radii, qui unitatis loco

loco ponitur, & in partes 10 000 000 vel plures decimales dividi intelligitur. Adeo ut ope hujus Tabulæ, cujuslibet Arcûs vel anguli sinus Tangens vel secans haberi potest; Et vicissim ex dato sinu Tangente vel secante dabitur qui iis respondet arcus vel angulus. Observandum est in sequentibus R esse notam Radii, S notam sinus, coS cosinus, T notam Tangentis, & coT coTangentis.

CONSTRUCTIO CANONIS.

PROP. I. THEOREMA.

Datis duobus quibuslibet Trianguli rectanguli lateribus, reliquum quoque dabitur.

Vide figuram propositionis tertiæ.

Est enim per 47 Elementi primi $ACq = ABq + BCq$ & $ACq - BCq = ABq$, & vicissim $ACq - ABq = BCq$. unde per extractionem Radicis quadratæ, dabitur $AC = \sqrt{ABq + BCq}$ & $AB = \sqrt{ACq - BCq}$ & $BC = \sqrt{ACq - ABq}$.

PROP. II. PROBL.

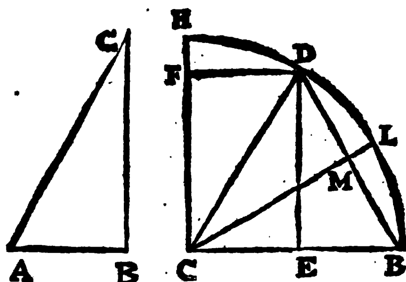
Dato DE sinu arcus DB. Invenire Cosinum DF.

Ex datis CD radio & DE sinu, in Triangulo rectangulo CDE dabitur per præcedentem $CE = \sqrt{CDq - DEq} = DF$.

PROP. III. PROBL.

Dato DE sinu arcus cujusvis DE. Invenire DM vel BM sinum arcus dimidii.

Dato DE dabitur per præcedentem CE, ac proinde EB quæ est differentia inter cosinum & Radium. In Tri-



angulo igitur rectangulo DBE datis DE & EB dabitur DB cujus semissis DM est sinus arcus DL = ½ arcus DB.

PROP. IV. PROBL.

Dato BM sinu arcus BL invenire sinum dupli Arcus.

Dato BM sinu, dabitur per Prop. 2. cosinus CM. Sunt autem Triangula CBM DBE æquiangula, ob angulos ad E & M rectos & angulum ad B communem, quare (per 4. 6.) erit CB : CM :: BD vel 2 BM : DE. Unde cum dantur tres priores hujus Analogiæ termini, quartus quoque qui est sinus arcus DB innotescet.

Corol. Et CB : 2 CM :: BD : 2 DE, hoc est, Radius ad duplum cosinus arcus ½ DB ut subtensa arcus DB ad subtensam dupli arcus. Item est CB : 2 CM :: (2 BM : 2 DE ::) BM : DE :: ½ CB : CM. unde dato sinu arcus alicujus & sinu arcus dupli, dabitur cosinus arcus simpli.

PROP. V.

Datis sinubus duorum arcuum B D F D, Invenire F I sinum summæ arcuum, Item E L sinum differentiæ eorundem

Ducatur Radius C D, & sit C O cosinus arcus F D, qui proinde dabitur. per O agatur O P parallela ad D K. Item ducantur O M G E parallelæ ad C B. Et ob æquiangula triangula C D K C O P C H I F O H F O M. Est primò C D : D K : : C O . O P, quæ itaque innotescet. Item est C D : C K : : F O : F M, adeoque & illa nota erit. sed ob F O = E O erit F M = M G = O N. Est itaque O P + F M = F I = sinui summæ arcuum : & O P — F M, hoc est, O P — O N = E L sinui differentiæ arcuum. Q. E. I.

A F D M O E G N H I P K L C B

Coroll. Quia arcuum B E B D B F differentiæ sunt æquales, Erit B D arcus medius arithmeticus inter arcus B E B F.

PROP. VI.

Iisdem positis, Radius est ad duplum cosinus arcus medii, ut sinus differentiæ ad differentiam sinuum extremorum.

Nam est C D : C K : : F O : F M, unde duplicando consequentes C D : 2 C K : : F O . 2 F M vel ad F G ; quæ est differentia sinuum E L F I. Q. E. D.

Cor. 1. Si arcus B D sit 60 grad. Erit differentia sinuum F I E L æqualis F O sinui distantiæ. Nam in eo casu sit C K sinus 30 grad. cujus duplum æquale est radio,

 adeoque

adeoque ob C D = 2 C K erit F O = F G. Adeoque si duo arcus BE BF ab arcu 90 gr. æquidistent, erit differentia sinuum æqualis sinui distantiæ F D.

Cor. 2. Hinc si dentur sinus omnium arcuum, dato intervallo à se invicem distantium ab initio quadrantis usque ad 60 gradus, facile inveniuntur reliqui per unicam additionem. Est enim sinus 61 gr. = sinui 59 gr. + sin 1 gr. & sinus 62 gr. = sinui 58 gr. + sin 2 gr. Item sinus 63 gr. = sinui 57 gr. + sin 3 gr. & ita deinceps.

Cor. 3. Si habeantur sinus omnium arcuum ab initio quadrantis, dato intervallo à se invicem distantium, usque ad datam quamvis quadrantis partem, dabuntur exinde sinus omnes usque ad hujus partis duplum *ex. g.* Dentur omnes sinus usque ad 15 gr. per præcedentem Analogiam inveniri possunt sinus omnes usque ad 30 gr. Nam est radius ad duplum cosinus 15 gr. ut sinus unius gradus ad differentiam sinuum 14 gr. & 16 gr. ita etiam est sinus 2 gr. ad differentiam sinuum 13 & 17 gr. & ita sinus 3 gr. ad differentiam sinuum 12 & 18 gr. atque sic continuo usque dum pervenietur ad sinum 30 gr.

Similiter ut Radius ad duplum cosinus 30 gr. seu ad duplum sinus 60 gr. ita sinus 1 gr. ad differentiam sinuum 29 & 31 gr. : : sin 2 gr. ad Differentiam sinunm 28 & 32 gr. : : sin 3 gr. ad differentiam sinuum 27 & 33 gr. sed in hoc casu est Radius ad duplum cosinus 30 gr. ut 1 ad $\sqrt{3}$. ac proinde si multiplicentur sinus distantiarum ab arcu 30 gr. per $\sqrt{3}$ dabuntur differentiæ sinuum.

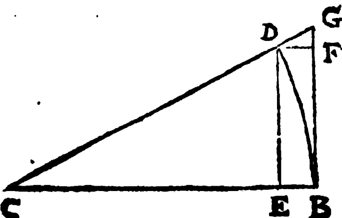
Similiter in ipso initio quadrantis minutim exquirere possumus sinus, datis sinubus & cosinubus unius & duorum minutorum. Nam ut Radius ad duplum cosinus 2′ : : sin 1′ : differentiam sinuum 1′ & 3′ : : Sin 2′ : differentiam sinnum 0′ & 4′ hoc est, ad ipsum sinum 4′. Et similiter ex datis sinubus priorum 4′ inveniuntur sinus reliqui usque ad 8′ & exinde ad 16′ & ita deinceps.

PROP.

PROP. VII. THEOREMA.

In arcubus exiguis sinus & Tangens ejusdem arus sunt quam proxime ad se invicem, in ratione æqualitatis.

Nam ob æquiangula triangula CED CBG, erit CE : CB : : ED : BG. sed accedente puncto D ad B, evanescit EB respectu arcus BD : unde fit CE fere æqualis CB. adeoque & ED fere æqualis BG. Si EB sit minor radii parte $\frac{1}{10\,000\,000}$ erit differentia inter sinum & tangentem, minor quoque tangentis parte $\frac{1}{10\,000\,000}$.



Cor. Cum Arcus sit tangente minor, sinu autem suo major; & exigui arcus sinus & tangens sunt fere æquales, erit etiam arcus suo sinui vel tangenti fere æqualis, Adeoque in exiguis arcubus, erit ut arcus ad arcum ita sinus ad sinum.

PROP. VIII.

Invenire sinum Arcus unius minuti.

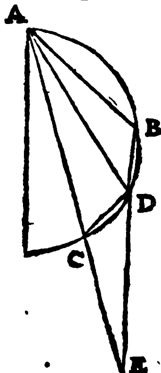
Latus Hexagoni circulo inscripti, hoc est, subtensa 60 graduum æqualis est Radio; (*per* 15^tam^ 4^ti^.) Radii itaque semissis erit sinus Arcus 30 gr. Dato itaque sinu Arcus 30 grad. invenitur sinus arcus 15 gr., (*per* 3^tiam^ hujus.) Item ex dato sinu 15 gr. per eandem invenitur sinus 7 gr. 30 min. & sinus hujus dimidii 3 gr. 45′ similiter invenitur; & ita deinceps, donec duodecima peracta bisectione, preveniatur ad arcum 52″ 44‴ 3⁗ 45′′′′′ cujus cosinus fere æqualis est radio, in quo casu (uti constat ex prop. 7.) sunt sinus arcubus suis proportionales; adeoque ut arcus 52″ 44‴. 3⁗. 45′′′′′ ad arcum unius minuti ita erit

erit ſinus prius inventus ad ſinum arcus unius minuti, qui igitur dabitur.

Dato ſinu unius minuti, invenietur per prop. 2 & 4, ſinus duorum minutorum ejuſque coſinus.

PROP. IX. THEOREMA.

Si angulus B A C in peripheria circuli exiſtens, biſecetur rectâ A D, Et producatur A C quoad D E = A D ipſi occurrat in E: erit C E = A B.



In Quadrilatero A B C D (per 22. 3.) ſunt anguli B & A C D æquales duobus rectis = D C E + D C A (per 13. 1.) unde erit angulus B = D C E. Quin etiam eſt angulus E = D A C (per 5. 1.) = D A B & eſt D C = D B. quare Triangula B A D & C E D ſunt congrua & C E eſt æqualis A B. Q. E. D.

PROP. X. THEOREMA.

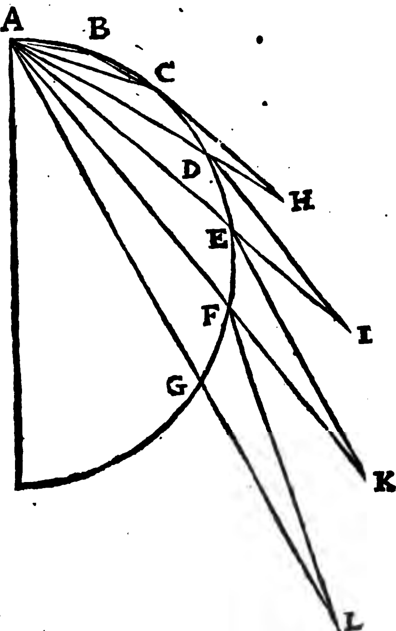
Sint arcus A B B C C D D E E F &c. æquales; Arcuumque A B A C A D A E &c. ſubtenſæ ducantur, erit A B : A C : : A C : A B + A D : : A D : A C + A E : : A E : A D + A F : : A F : A E + A G.

Producantur A D in H, A E in I, A F in K, & A G in L, ut triangula A C H A D I A E K A F L ſint Iſoſcelia. Et quoniam angulus B A D biſectus eſt, fièt D H = A B per precedentem. Similiter erit E I = A C, F K = A D, item G L = A E.

Sed Triangula Iſoſcelia A B C C A H D A I E A K F A L, ob angulos ad baſes æquales, ſunt æquiangula. Quare erit ut A B : A C : : A C : A H = A B + A D : : A D : A I = A C + A E : : A E : A K = A D + A F : : A F : A L = A E + A G. Q. E. D.

Corol.

Corol. Quoniam est AB ad AC ut Radius ad duplum cosinus Arcus $\frac{1}{2}$ AB, (per corol. prop. 4.) erit quoque ut Radius ad duplum cosinus arcus $\frac{1}{2}$ AB ita $\frac{1}{2}$ AB : $\frac{1}{2}$ AC : : $\frac{1}{2}$ AC : $\frac{1}{2}$ AB + $\frac{1}{2}$ AD : : $\frac{1}{2}$ AD : $\frac{1}{2}$ AC + $\frac{1}{2}$ AE : : $\frac{1}{2}$ AE : $\frac{1}{2}$ AD + $\frac{1}{2}$ AF &c. Sint jam arcus AB BC CD &c. singuli 2′. Erit $\frac{1}{2}$ AB sinus unius minuti, $\frac{1}{2}$ AC sinus 2′. $\frac{1}{2}$ AD sinus 3′ $\frac{1}{2}$ AF sinus 4′ &c. Unde datis sinubus unius & duorum minutorum sinus omnes reliqui sic facillime habentur.



Dicatur cosinus arcus unius minuti, hoc est, sinus arcus 89 gr. 59′ Q & fient sequentes Analogiæ, R : 2 Q : : Sin 2′ : S 1′ + S 3′. quare dabitur sinus 3′. Item R : 2 Q : : S. 3′ : S. 2′ + S. 4′. quare dabitus S 4′.

Item R : 2 Q : : S. 4′ : S. 3′ + S. 5′. quare habetur sinus 5′.

R : 2 Q : : S. 5′ : S 4′ + S 6′ proinde dabitur S 6′. Atque ita deinceps ad singula quadrantis minuta dabuntur sinus. Et quoniam Radius seu primus Analogiæ terminus est Unitas; operationes per multiplicationem contractam & subductionem facillime expediuntur.

Inventis sinubus, usque ad gradum sexagesimum. Reliqui sinus per solam additionem habentur (per cor. 2. pr. 6.)

Datis sinubus, Tangentes & secantes ex Analogiis sequentibus inveniri possunt. (In fig. Definitionum) ob æquiangula Triangula CED CBG CHI.

CE :

CE : ED : : CB : BG. hoc est, coS : S : : R : T.
GB : BC : : CH : HI. h. e. T : R : : R : coT.
CE : CD : : CB : CG. h. e. coS : R : : R : Secant.
DE : CD : : CH : CI. h. e. S : R : : R : co Secant.

SCHOLIUM.

Magnus ille Geometra, summusque Philosophus Dominus Newtonus *Primus series in infinitum convergentes exhibuit, quibus ex datis arcubus, eorum sinus computari possint. Nam si Arcus dicatur* A *&* *Radius sit unitas invenit ejus sinum fore.*

$$A - \frac{A^3}{1.2.3} + \frac{A^5}{1.2.3.4.5} - \frac{A^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \frac{A^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}$$

&c. Cosinum autem esse

$$1 - \frac{A^2}{1.2} + \frac{A^4}{1.2.3.4} - \frac{A^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{A^8}{1.2.3.4.5.6.7.8} \ \&c.$$

Hæ series initio quadrantis cum Arcus A *parvus est celerrime convergunt. Nam in serie pro sinu, si* A *non superet decem minuta, duo primi ejus termini scil.* $A - \frac{1}{6}A^3$ *dant sinum ad* 15 *figurarum loca, si Arcus* A *non major sit gradu, tres primi exhibent sinum ad totidem loca, adeoque pro primis & ultimis Quadrantis sinubus hæ series sunt admodum utiles. Sed quo major sit arcus* A, *eo pluribus opus est terminis ut inveniatur sinus in numeris qui sunt veri ad datum figurarum locum. Tandem autem lentissime convergunt series cum Arcus fere æqualis est Radio. Cui rei ut remedium adferatur, ego alias excogitavi series* Newtonianis *similes, in quibus suppono arcum cujus sinus quæritur esse summam vel differentiam duorum arcuum scil. esse* A + z *vel* A — z : *notosque esse sinum & cosinum arcus* A. *scil. sit* a *sinus arcus* A *&* b *ejus cosinus. Sinus Arcus* A + z *per hanc seriem exprimetur*

$$1 \quad a + \frac{bz}{1} - \frac{az^2}{1.2} - \frac{bz^3}{1.2.3} + \frac{az^4}{1.2.3.4} + \frac{bz^5}{1.2.3.4.5} \ \&c.$$

Ejus

2. *Ejus Cosinus* $b - \frac{az}{1} - \frac{bz^2}{1.2} + \frac{az^3}{1.2.3.} + \frac{bz^4}{1.2.3.4} - \frac{az^5}{1.2.3.4.5} - \frac{bz^6}{1.2.3.4.5.6}$ &c.

Similiter sinus Arcus A — z *est*

3. $a - \frac{bz}{1} - \frac{az^2}{1.2} + \frac{bz^3}{1.2.3} + \frac{az^4}{1.2.3.4} - \frac{bz^5}{1.2.3.4.5} - \frac{az^6}{1.2.3.4.5.6}$ &c.

Et cosinus est

4. $b + \frac{az}{1} - \frac{bz^2}{1.2.} - \frac{az^3}{1.2.3} + \frac{bz^4}{1.2.3.4} + \frac{az^5}{1.2.3.4.5}$ &c.

Arcus A *est medius Arithmeticus inter arcus* A — z & A + z. *Differentiæ sinuum sunt*

5. $\frac{bz}{1} - \frac{az^2}{1.2} - \frac{bz^3}{1.2.3} + \frac{az^4}{1.2.3.4} + \frac{bz^5}{1.2.3.4.5} - \frac{az^6}{1.2.3.4.5.6}$ &c.

6. $\frac{bz}{1} + \frac{az^2}{1.2} - \frac{bz^3}{1.2.3} - \frac{az^4}{1.2.3.4} + \frac{bz^5}{1.2.3.4.5} + \frac{az^6}{1.2.3.4.5.6}$ &c.

Unde differentiarum differentia seu differentia secunda

7. *Prodit* $\frac{2az^2}{1.2} - \frac{2az^4}{1.2.3.4} + \frac{2az^6}{1.2.3.4.5.6}$ &c.

Seu $\frac{2a \times z^2}{1.2} - \frac{z^4}{1.2.3.4} + \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6}$ &c.

Quæ series æqualis est duplo sinus arcus medii ducto in sinum versum arcus z *& celerrime convergit. Adeo ut si* z *sit minutum primum, terminus seriei primus dat differentiam secundam ad* 15 *figurarum loca; secundus autem terminus ad* 25 *loca.*

Hinc datis sinubus duorum quorumvis arcuum intervallo minuti distantium, facili admodum operatione inveniri possint sinus reliquorum omnium arcuum qui sunt in eadem progressione.

In

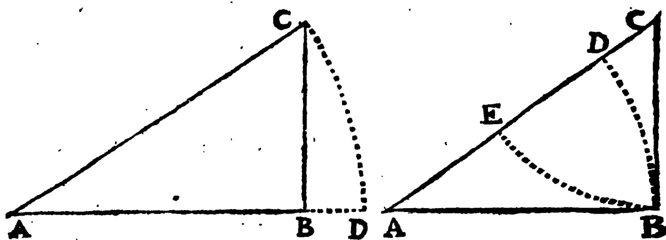
In serie prima & secunda si Arcus A *sit* = 0, *erit* a = 0 & b *ejus cosinus sit radius seu* 1. & *hinc destructis terminis ubi est* a & *pro* b *posito* 1 *series deveniunt* Newtonianæ. *In serie tertia & quarta. si* A *sit* 90 *gr. fiet* b = 0 & a = 1 *unde quoque destructis terminis ubi est* b & *pro* a *posito* 1 *rursus prodibunt series* Newtonianæ.

Omnes hæ series ex Newtonianis *facile fluunt per prop.* 5. *hujus.*

PROP. XI.

In Triangulo Rectangulo, si Hypotenusa sit Radius, latera sunt sinus angulorum oppositorum; si vero crus alterum fiat Radius, crus reliquum est Tangens anguli oppositi, & Hypotenusa est anguli secans.

Manifestum est C B esse sinum arcus C D, ejusque cosinum esse A B, sed arcus C D est mensura anguli A, & complementum mensuræ anguli C. Præterea in secunda figura posito A B radio, est B C, Tangens & A C secans ar-



cus B D, qui est mensura anguli A, & similiter in eadem figura posito B C radio, est B A Tangens & A C secans arcus B E vel anguli C. Q. E. D.

Est igitur, ut A C secundum datam quamvis mensuram æstimata ad B C in eadem mensura æstimatam, ita erit 10000000 numerus partium in quas dividi supponitur Radius, ad numerum qui exprimit in iisdem partibus longitudinem quam habet sinus anguli A, hoc est,

Erit

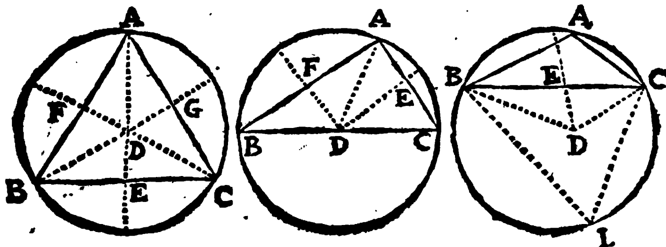
Erit AC : BC : : R : S, A
Simili ratione erit AC : BA : : R : S, C
Item AB : BC : : R : T, A
Et BC : BA : : R : T, C

In his itaque proportionalibus si dantur tres quælibet, per Regulam Trium invenietur quarta.

PROP. XIII.

Trianguli plani latera sunt ut sinus angulorum oppositorum.

Trianguli circulo inscripti latera perpendicularibus radiis bisecentur. Et erunt semilatera sinus angulorum ad peripheriam. Est enim angulus BDC ad centrum du-



plex anguli BAC ad peripheriam (per 20. El. 3.) cujus itaque dimidium sc. BDE æquale est BAC, atque ejus sinus est BE. Eadem ratione erit BF sinus anguli BCA. Et AG erit sinus anguli ABC.

In Triangulo rectangulo est BD = $\frac{1}{2}$ BC = Radio (per 31. El. 3.) sed Radius est sinus anguli recti unde $\frac{1}{2}$ BC est sinus anguli A.

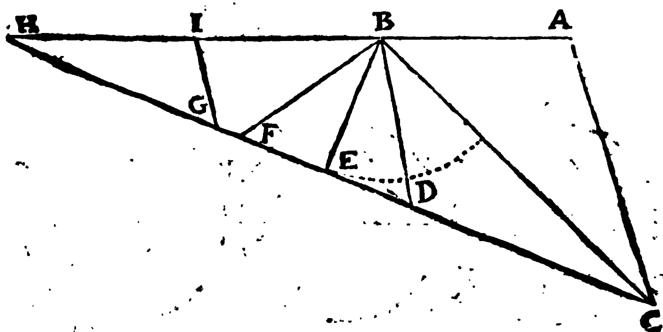
In Triangulo Amblygonio, ductis BL CL, erit angulus L complementum anguli A ad duos rectos (per 22. El. 3.) ac proinde idem erit utriusque anguli sinus. Est autem BDE (cujus sinus est BE) = angulo L. quare erit & BE sinus anguli BAC. Sunt itaque in omni triangulo semisses laterum sinus angulorum oppositorum, manifestum autem est latera esse inter se ut ipsorum semisses. Q. E. D.

BROP.

PROP. XIII.

In Triangulo Plano summa Crurum, Differentia Crurum, Tangens semisummæ angulorum ad basim, & Tangens semidifferentiæ eorundem sunt proportionales.

Sit Triangulum ABC cujus crura AB BC & Basis AC. producatur AB ad H ut sit BH = BC. erit AH summa crurum; fiat BI = BA, & erit IH differentia cru-



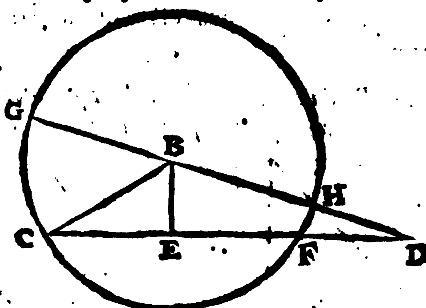
rum Item est HBC angulus = angulis A + ACB (per 32. El. 1.) cujus itaque dimidium EBC = semisummæ angulorum A & ACB, ejusque Tangens (posito Radio = EB) est EC. Ducatur BD ad AC parallela, fiatque HF = CD. Et ob HB = CB erit (per 4. El. 1.) angulus HBF = CBD = BCA (per 29. El. 1.) Est etiam angulus HBD = angnlo A. unde erit FBD differentia angulorum A & ACB: Et EBD eorum semidifferentia, cujus tangens est ED. per I ducatur IG parallela ad AC vel BD & fiet (per 2. El. 6.) AB : BI :: CD : DG. At est AB = BI, unde erit & CD = DG. at est CD = HF, unde HF = DG & proinde HG = DF & ½ HG = ½ DF = DE. Et quia triangula AHC IHG sunt æquiangula, erit AH : IH :: HC : HG :: ½ HC ½ HG :: EC : ED. hoc est, erit AH summa crurum ad IH differentiam crurum, ut EC Tangens semissis summæ angulorum

angulorum ad Basim, ad E D Tangentem semissis differentiæ eorundem. Q. E. D.

PROP. XIV.

In Triangulo Plano, Basis, summa laterum, Differentia laterum, Differentia segmentorum basis sunt proportionales.

Trianguli B C D basis esto D C, centro B radio B C describatur circulus, & producatur D B in G, ex puncto B in basin cadat perpendicularis B E, erit D G = D B +



B C = summæ laterum, & D H = differentiæ laterum, & segmenta basis sunt D E C E quorum differentia est D F. Quoniam (per cor. prop. 37. El. 3.) rectangulum sub D C D F æquale est rectangulo sub D G D H, erit (per 16. El. 6.) D C : D G : : D H : D F.

PROBLEMA.

Datis duarum quarumvis quantitatum summa & differentia, ipsas quantitates invenire.



Si ad semisummam addatur semidifferentia, aggregatum erit æquale majori; si autem à semisummâ subducatur semidifferentia, residuum erit æquale minori. Sint enim A B B C duæ quantitates; & capiatur A D = B C. Fiet D B differentia. Quarum summa est A C, quæ bisecta in

B E dat

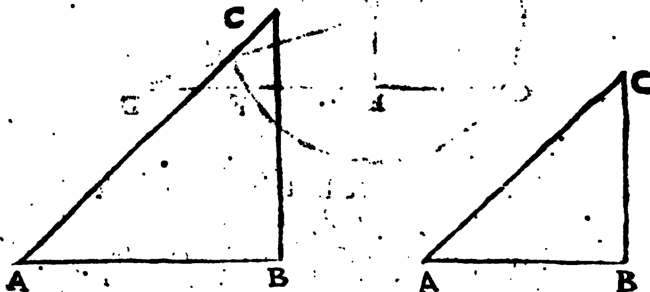
E dat AE vel EC semisummam & DE vel EB semidifferentiam. Porro est AB = AE + EB = semisummæ + semidifferentia, & BC = CE − EB = semisummæ − semidifferentia.

IN quovis Triangulo plano datis duobus angulis, datur tertius qui est summæ duorum reliquorum complementum ad duos rectos.

In Triangulo autem rectangulo dato alterutro angulo acuto, datur reliquus, qui est dati complementum ad rectum.

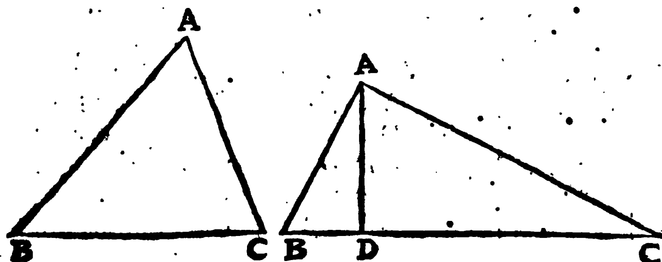
Datis autem duobus trianguli rectanguli lateribus, ut inveniatur reliquum non opus est canone sed perficitur ope prop. primæ hujus.

Trianguli Rectanguli solutiones Trigonometricæ sunt quæ sequuntur.



	Datis.	Quær.	Fiat.
1	AB BC cruribus,	Anguli.	AB:BC::R:T anguli A. Cujus complementum est Angulus C.
2	AB AC crure & Hypoten.	Anguli.	AC:AB::R:S, C cujus complementum est angulus A.
3	AB & A crure & angulo.	BC crus alterum	R : T,A : : AB : BC.
4	AB & C crure & angulo.	AC Hypotenusa.	S, C : R : : AB : AC.

In



In Triangulis obliquangulis.

	Datis.	Quær.	Fiat.
1	A. B. C & A B angulis & latere.	B C & A C latera.	S,C:S,A::AB:BC. Item S,C:S,B::AB : A C; datis duobus angulis datur tertius, unde casus cum dentur duo anguli & latus; reliqua quærantur, recidit in hunc casum.
2	A.B.C. omnibus angulis.	AB.AC. BC omnia latera.	S, C : S,A : : A B : B C. Et S, C : S,B : : A B : A C. unde datis angulis invenire licet proportiones laterum, at non ipsa latera, nisi ipsorum unum prius innotescat.
3	AB:BC,&C duobus lateribus & angulo uni opposito.	A & B anguli.	A B : B C : S, C : S, A, qui proinde inveniatur. Sed quia idem est finus anguli & ejus complementi ad duos rectos, prænoscenda est anguli A Species.
4	A B. B C & B. lateribus teribus & angulo interjecto.	Anguli. A & C.	B C + A B : B C — A B : : $\frac{T, A + C}{2} : \frac{T, A — C}{2}$ unde datur differentia angulorum A & C quorum summa quoque est nota; & proinde per *Problema post prop.* 14. dabuntur ipsi anguli.

	Datis	Quær.	Fiat.
5	A B. B C A C omnibus lateribus.	Anguli.	Demisso a vertice in Basim perpendiculo. Quærantur segmenta basis per prop. 14. Fiat scil. B C : A C + A B : : A C — A B : D C — D B, & ex hac analogia dabuntur B D. D C. & proinde per resolutionem triangulorum rectangulorum A B D A D C dabuntur anguli.

TRIGO-

TRIGONOMETRIÆ Sphæricæ ELEMENTA.

DEFINITIONES.

1. SPhæræ Poli, sunt duo puncta in superfice Sphæricæ, quæ sunt Axis extrema.

2. Polus circuli in Sphæra, est punctum in superfice Sphæræ, à quo omnes rectæ lineæ ad circuli circumferentiam tendentes, sunt inter se æquales.

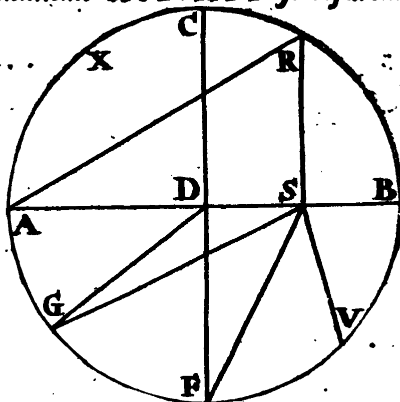
3. Circulus in sphæra maximus est, cujus planum transit per sphæræ centrum, & cujus centrum idem est cum centro Sphæræ.

4. Triangulum Sphæricum est figura comprehensa sub arcubus trium maximorum in Sphæra circulorum.

5. Angulus Sphæricus est is qui in superficie sphærica, continetur sub duobus arcubus maximorum circulorum; qui æqualis est inclinationi planorum istorum circulorum.

PROP. I.

Circuli maximi ACB AFB se bifariam secant.



Cum enim circuli habent idem centrum, communis eorum sectio erit utriusque circuli diameter, quæ eos bifariam secabit.

Cor. Hinc in superficie sphæræ, duo maximorum circulorum Arcus semicirculis minores, spatium non comprehendunt, non enim possunt, nisi in duobus punctis semicirculo oppositis, sibi invicem occurrere.

PROP. II.

Si à polo C circuli cujusvis AFB, ducatur ad ejus centrum recta CD, ea ad planum istius circuli perpendicularis erit.

In circulo A F B ducantur diametri quævis E F G H; Et quoniam in triangulis C D F C D E, sunt C D D F æquales C D D E, & basis C F æqualis basi C E (per def.2.) erit (per 8. El.1.) angulus C D F = angulo C D E; ac proinde uterque rectus erit, similiter demonstrabitur, angulos

angulos CDG CDH esse rectos; unde (per 4. El. 11.) erit CD perpendicularis ad planum circuli AFE. Q.E.D.

Cor. 1. Circulus maximus distat à polo suo intervallo Quadrantis; nam ob angulos CDG CDF rectos, erunt ipsorum mensuræ, sc. arcus CG CF quadrantes.

Cor. 2. Circuli maximi per polum alterius circuli transeuntes cum ipso faciunt angulos rectos; & vicissim, si cum altero circulo faciunt angulos rectos; transibunt per polum alterius istius circuli; nam per rectam DC eos transire necesse est.

PROP. III.

Si polo A describatur maximus circulus ECF, arcus CF interceptus inter AC AF, est mensura anguli CAF vel CDF.

Per corol. 1. præcedentis, sunt arcus AC AF quadrantes, ac proinde anguli ADC ADF sunt recti, quare (per defin. 6. El. 11.) angulus CDF (cujus mensura est arcus CF) æqualis est inclinationi planorum ACB AFB, æqualis quoque angulo Sphærico CAF vel CBF. Q.E.D.

Cor. 1. Si arcus AC AF sunt Quadrantes, erit A polus circuli per puncta C & F transeuntis, est enim AD ad planum FDC normalis, (per 4. El. 11.)

Cor. 2. Anguli ad verticem sunt æquales, uterque enim est æqualis inclinationi circulorum. Item anguli qui sunt deinceps sunt æquales duobus rectis.

PROP. IV.

Triangula erunt æqualia & congrua, si duo latera habeant duobus lateribus æqualia, & angulos æqualibus lateribus comprehensos etiam æquales.

PROP. V.

Item Triangula erunt æqualia & congrua, si latus cum angulis adjacentibus in uno triangulo sit æquale lateri cum angulis adjacentibus in altero triangulo.

PROP. VI.

Triangula æquilatera sunt etiam æquiangula.

PROP. VII.

In Triangulis Isoscelibus, anguli ad basim sunt æquales.

PROP. VIII.

Si anguli ad basim fuerint æquales, erit Triangulum Isosceles.

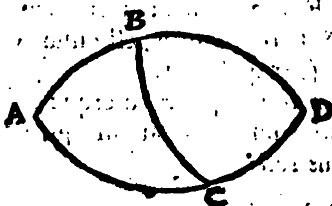
Eodem modo demonstrantur quinque propositiones præcedentes ut in triangulis planis.

PROP. IX.

Quælibet duo trianguli latera reliquo sunt majora.

Nam arcus circuli maximi, inter duo quælibet in superficie sphæræ puncta, est via brevissima.

PROP. X.



Quodlibet trianguli latus minus est semicirculo.

Producantur trianguli ABC latera AC AB, donec conveniunt in D, erit arcus ACD semicirculus, qui major est quam AC.

PROP. XI.

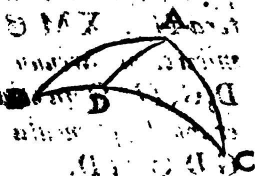
Trianguli latera sunt circulo minora.

Et enim DB + DC major quam BC, (per prop. 9.) & utrinque addendo BA + AC, erit DBA + DCA, hoc est, circulus major quam AB + BC + AC, quæ sunt tria latera trianguli ABC.

BROP.

PROP. XII.

In triangulo ABC, major angulus A majori lateri subtenditur.



Fiat angulus B A D = angulo B, & erit A D = B D (per 8. hujus) unde B D C = D A + D C, & hi arcus majores sunt quam A C, est itaque latus B C, quod subtendit angulum B A C, majus quam A C, quod subtendit angulum B.

PROP. XIII.

In quolibet triangulo A B C, si summa Crurum A B B C sit major æqualis vel minor semicirculo; internus angulus ad basim A C erit major æqualis aut minor externo & opposito B C D, ideoque summa angulorum A & A C B major erit, aut æqualis, aut minor duobus rectis.

Vide Fig. Prop. 10.

Sit primò A B + B C = semicirculo = A D, erit B C = B D; & anguli B C D & D æquales, (per 7 hujus) unde & angulus B C D erit = angulo A.

Sit secundò A B + B C majores quam A B D, erit B C major quam B D; unde & angulus D, hoc est angulus A) major erit angulo B C D. (per 12. hujus) Similiter ostendetur, si A B + B C sint simul minores semicirculo, fore angulum A minorem angulo B C D; & quoniam anguli B C D & B C A sunt = duobus rectis; si angulus A sit major B C D, erit A & B C A majores duobus rectis. Si A sit = B C D erit A & B C A æquales duobus rectis. Si vero A sit minor quam B C D, erunt A & B C A minores duobus rectis. Q. E. D.

PROP.

PROP. XIV.

In quolibet triangulo G H D, laterum poli, ductis circulis maximis, constituunt aliud triangulum XMN, quod supplementum est trianguli G H D; nempe latera N X X M & N M erunt supplementa ad semicirculos arcuum qui sunt mensuræ angulorum D, G, H. Quin etiam mensuræ angulorum M, X, N, erunt supplementa ad semicirculos, laterum G H G D & H D.

Polis G, H, D, describantur maximi circuli X C A M T M N O X K B N. Et quia G est polus circuli X C A M, erit G M = Quadranti, (per cor. 1. prop. 2.) & ob H polum circuli T M O, erit H M quoque Quadrans; Quare (per corol. 1. prop. 3.) erit M polus circuli G H. Similiter quia D est polus circuli X B N, & H polus circuli T M N, erunt arcus D N H N Quadrantes; ac proinde (per cor. 1. prop. 3.) N erit polus circuli H D. Et eadem ratione, ob G X D X quadrantes, erit X polus circuli G D. Hisce præmissis.



Quoniam est N K = Quadranti (cor. 1. prop. 2.) & X B = Quadranti, erunt N K + X B hoc est N X + K B = duobus Quadrantibus seu semicirculo; adeoque est N X supplementum arcus K B seu mensuræ anguli H D G ad semicirculum. Similiter quia est M C = Quadranti, & X A = Quadranti; erunt M C + X A, hoc est, X M + A C = duobus quadrantibus seu semicirculo, & proinde X M est supplementum arcûs A C qui est mensura anguli H G D. Quinetiam, ob M O, N T Quadrantes, erunt M O + N T = O T + N M = semicirculo. itaque est N M supplementum ad semicirculum arcûs O T seu mensuræ anguli G H D. Q. E. D.

Præterea

Præterea quia DK HT sunt quadrantes, erunt DK + HT seu KT + HD æquales duobus quadrantibus, seu semicirculo. Et ergo KT, seu mensura anguli XNM, supplementum lateris HD ad semicirculum. Nec dissimili methodo ostendetur OC mensuram anguli XMN esse supplementum lateris GH. Et BA mensuram anguli X esse supplementum lateris GD. Q. E. D.

PROP. XV.

Triangula æquiangula sunt etiam æquilatera.

Nam eorum supplementa sunt æquilatera, (per 14. hujus) ergo & æquiangula, quare & ipsa sunt æquilatera, per prop. 14. partem secundam.

PROP. XVI.

Trianguli tres anguli sunt majores duobus rectis, & minores sex rectis.

Vide Fig. Prop. 14.

Nam tres mensuræ angulorum G, H, D, una cum tribus lateribus trianguli XNM faciunt tres semicirculos, (per 14. hujus) sed tria latera trianguli XNM minora sunt duobus semicirculis, (per 11. hujus), quare tres mensuræ angulorum GHD majores sunt semicirculo, & proinde anguli GHD majores erunt duobus rectis.

Propositionis secunda pars patet, nam in quolibet triangulo, externi & interni anguli simul tantum faciunt sex rectos, unde interni sunt minores quam sex recti.

PROP. XVII.

Si à puncto R quod circuli AFBE polus non est, in circumferentiam cadant arcus maximorum circulorum RA RB RG RV, maximus est RA, qui per ejus polum C incedit; reliquus vero minimus, cæteri prout à maxima recedunt minores sunt, faciunt-

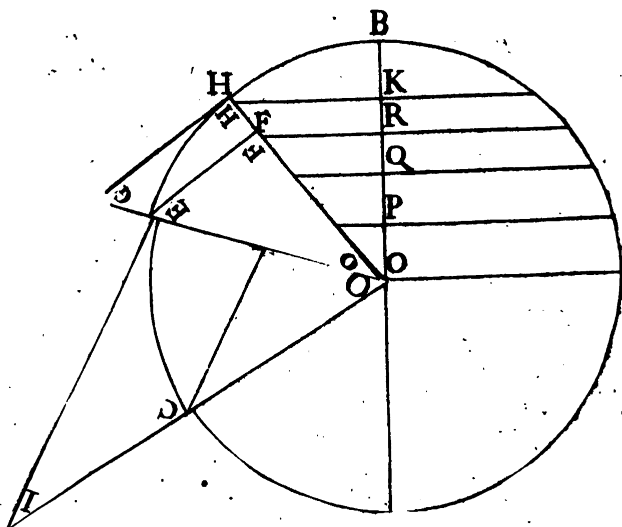
que

nis, erunt anguli ABC & ACB diversæ affectionis; quod est contra hypothesim.

In 2*do* Casu si perpendicularis non cadat extra, cadet intra, (in fig. 1.) Et in triangulo ABP, est angulus B ejusdem affectionis cum crure AP, & similiter in triangulo ACP est angulus C ejusdem affectionis cum AP, unde anguli B & C sunt ejusdem affectionis, quod est contra hypothesim.

PROP. XXIII.

In Triangulis BAC BHE rectangulis ad A & H, si idem fuerit angulus acutus B ad basim BA vel BH, Sinus hypotenusarum erunt sinubus arcuum perpendicularium proportionales.



Nam rectæ CD EF perpendiculariter insistentes eidem plano sunt parallelæ. Item FR DP radio OP perpendiculares, sunt quoque parallelæ; unde & plana triangulorum EFR CDP sunt parallela (per 15. El. 11.) Quare & CP ER horum planorum communes

sectiones

sectiones cum plano per B E C O transeunte parallelæ erunt (per 16. El. 11.) Triangula igitur G D P. E F R æquiangula erunt. Quare C P sinus Hypotenusæ B C est ad C D sinum arcus perpendicularis C A; ut E R sinus hypotenusæ B E est ad E F sinum arcus perpendicularis E H. Q. E. D.

PROP. XXIV.

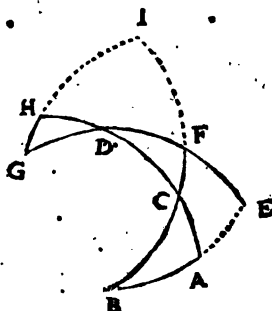
Iisdem positis, A Q. H K sinus basium, tangentibus I A G H arcuum perpendicularium, sunt proportionales.

Nam similiter ut in præcedente propositione, ostendetur triangula Q A I. K H G esse æquiangula; unde Q A : A I : : K H : H G.

PROP. XXV.

In Triangulo A B C rectangulo ad A. Ut cosinus anguli B existentis ad Basim B A ad sinum anguli verticalis A C B, ita cosinus arcus perpendicularis ad Radium.

Præparatio. Producantur latera B A B C C A ita ut B E B F C I C H sint Quadrantes, polis B & C ducantur circuli maximi E F D G I H G. & erunt anguli ad E, F, I & H recti. Quare D est polus B A E (per cor. 2 pr. 2 hujus) & G polus I F C B, erit etiam A E = complemento arcûs B A. Item F E mensura anguli B = G D, & D F eorum complementum. erit quoque B C = F I = mensuræ anguli G, & C F eorum complementum. Item est C A = H D, & D C utriusque complementum. Hisce præmissis, in triangulis H I C D C F rectangulis ad I & F & habentibus eundem angulum



gulum C acutum, ob B A minorem quadrante, erit S, D F : S, H I : : S, D G : S, H C id est, cosinus anguli B est ad sinum anguli verticalis B C A ut cosinus C A ad Radium. Q. E. D.

PROP. XXVI.

Cosinus basis : cosin. Hypotenusæ : : R : coS perpendicularis.

Nam in Triangulis A E D C F D rectangulis ad E & F ; habentibus eundem angulum D acutum, ob A E quadrante minorem, est S, E A : S, C F : : S, D A : S, D C. Q. E. D.

PROP. XXVII.

S, Baseos : R : : T, perpendicularis : T, anguli ad basim.

Nam in Triangulis B A C B E F rectangulis ad A & E & habentibus eundem angulum B acutum, ob A C minorem quadrante, S, B A : S, B E : : T, A C : T, B F. Q. E. D.

PROP. XXVIII.

CoS, anguli verticalis : R : : T, perpendicularis : T, Hypotenusæ.

In Triangulis G I F G H D rectangulis ad I & H, & habentibus eundem angulum G acutum, ob H D minorem H C seu quadrante, est S, G H : S, G I : : T, H D : T, I F.

PROP. XXIX.

S, Hypotenusæ : R : : S, perpendicularis : S, anguli ad basim.

In Triangulis præcedentibus, est S, I F : S, G F : : S, H D : S, G D.

PROP.

PROP. XXX.

Radius : coS. Hypotenusæ : : T, anguli verticalis : coT, anguli ad basim.

In Triangulis HIC DFC rectangulis ad I & F, & habentibus eundem angulum C acutum, ob D F minorem quadrante, Est S, C I : S, C F : : T, H I : T, D F. hoc est, R : coS, B C : : Tang, C : coT, anguli B.

Propositiones sex præcedentes ad omnes casus triangulorum rectangulorum resolvendos sufficiunt, sequuntur illi numero sedecim cum suis analogiis ex hisce deductis.

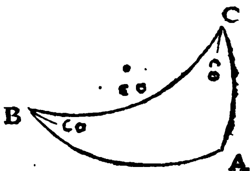
	Datis præter ang. rectum.	Quær.		
1	A C & C	B	R : coS, C A : : S, C : coS, B ejusdem speciei cum C A.	per 25 inverse
2	A C & C	C	coS, C A : R : : coS, B : S, C ambigui.	per 25
3	B & C	A C	S, C : coS, B : : R : coS, C A ejusdem speciei cum ang. B.	per 25 & 18
4	B A C A	B C	R : coS, B A : : coS, A C : coS B C. Si B A A C fuerint ejusdem affectionis nec Quadrantes, erit B C minor quadrante; si diversæ, erit B C quadrante major.	per 26 & 19 20
5	B A B C	A C	coS, B A : R : : coS, B C : coS, C A. Si B C sit major aut minor quadrante, B A & C A erunt ejusdem aut diversæ affectionis, sed datur B A ejusque Species, ergo.	per 26 & 21
6	B A C A	B	S, B A : R : : T, C A : T, B ejusdem affectionis cum latere opposito C A.	per 27 & 18
7	B A B	A C	R : S, B A : : T, B : T, A C, ejusdem specei cum B.	per 27 & 18

	Datis præter ang. rectum.	Quær.		
8	A C B	B A	T, B : R : : T, C A : S, B A ambigui.	per 27
9	B C C	A C	R : coS, C : : T, B C : T, C A. Si B C fit major aut minor quadrante, anguli C & B funt ejusdem aut diverſæ affectionis, quare data ſpecie ang. B dabitur A C.	per 28 & 21
10	A C C	B C	coS, C : R : : T, A C : T, B C. prout ang. C & A C fuerint ejusdem aut diverſæ affectionis, B C erit minor aut major quadrante.	per 18, 19, 20
11	B C A C	C	T, B C : R : : T, C A : coS, C. Si B C fuerit major aut minor Quadrante, C A & B A & proinde anguli C & B erunt ejuſdem aut diverſæ affectionis, ſed datur ſpecies C A, ergo dabitur ſpecies anguli C.	per 28. 21
12	B C B	A C	R : S, B C : : S, B : S, A C ejuſdem ſpeciei cum B.	per 29 & 18
13	A C B	B C	S, B : S, A C : : R : S, B C ambigui.	per 29
14	B C A C	B	S, B C : R : : S, A C : S, B ejuſdem ſpeciei cum C A.	per 29
15	B C	B C	T, C : R : coT, B : coS, B C. prout anguli B & C ejuſdem aut diverſæ affectionis fuerint, erint B C minor aut major quadrante.	per 30. 19 23
16	B C C	B	R : coS, B C : : T, C : coT, B. prout B C fuerit minor aut major quadrante; anguli C & B erunt ejuſdem aut diverſæ affectionis. Sed datur ſpecies anguli C, quare dabitur ſpecies anguli B.	per 30 21

De

De Resolutione Triangulorum Rectangulorum Sphæricorum, per quinque partes circulares.

PErpensis Analogiis, quibus Triangula Sphærica Rectangula solvuntur, Dominus *Neperus*, nobilis ille Logarithmorum Inventor, duas excogitavit Regulas memoriâ facile retinendas, quarum ope omnes sedecim casus resolvi possunt; Nam cum in hisce triangulis, præter angulum rectum, sint tria latera & duo anguli, latera angulum rectum comprehendentia, hypotenusa autem & reliquorum angulorum complementa, vocavit *Neperus partes circulares*. Et cum datæ sunt duæ quælibet partes, & quæritur Tertia, Harum trium una, quæ dicitur *pars media*, vel adjacet duobus reliquis partibus, quæ itaque vocantur *extremæ adjacentes*; vel neutri adjacet, in quo casu, dicuntur *extremæ oppositæ*; Sic si complementum anguli B ponatur pars media, Crus AB & complementum Hypotensusæ BC sunt partes extremæ adjacentes; At complementum anguli C, & latus AC sunt extremæ oppositæ. Item posito complemento hypotenusæ BC parte media, complementa angulorum B & C sunt extremæ adjacentes; & AB AC crura sunt extremæ oppositæ. Sic etiam posito crure AB parte media, complementum anguli B, & AC sunt extremæ adjacentes; Nam angulus rectus A non intercipit adjacentiam, quia non est pars circularis. At eidem parti mediæ complementum anguli C & complementum hypotenusæ BC sunt extremæ oppositæ. Hisce præmissis.



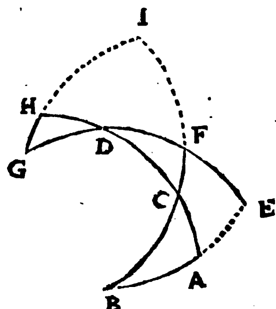
REGULA PRIMA.

In Triangulo Rectangulo Sphærico, Rectangulum sub Radio & sinu partis mediæ, æquale est rectangulo sub Tangentibus partium Adjacentium.

REGULA SECUNDA.

Rectangulum sub radio & sinu partis mediæ, æquale est rectangulo sub cosinubus partium oppositarum.

Utriusque Regulæ tres sunt casus. Nam pars media vel potest esse complementum anguli B vel C, vel complementum hypotenusæ BC; vel denique unum ex cruribus scil. AB vel AC.



Casus 1. Sit complementum anguli C pars media. Et erunt AC & complementum hypotenusæ BC extremæ adjacentes. Per pr. 28. Et ut cosinus anguli verticalis C ad Radium, Ita Tangens CA ad Tangentem Hypotenusæ BC. permutando erit coS. C : T, CA : : R : T, BC. sed ut notum est, R : T, BC : : coT, BC : R. quare coS, C : T, AC : : coT, BC : R; Unde R × coS, C = T, AC × coT, BC.

Eidem complemento anguli C parti mediæ, extremæ oppositæ sunt complementum anguli B & AB, & (per prop. 25.) coSinus anguli C est ad sinum anguli CDF ut coSinus DF ad Radium, est vero Sinus CDF = S, AE = coS, BA, & coS, DF = S, EF = S, ang. B. unde erit coS, C : coS, BA : : S, B : R. & R × coS, D = coS. BA × S, B hoc est, Radius ductus in sinum partis mediæ, æquatur rectangulo sub cosinubus extremarum oppositarum.

Casus 2. Sit complementum hypotenusæ BC pars media, & complementa angulorum B & C erunt extremæ adjacentes. In triangulo DCF (per prop. 27.) Est S, CF : R : : T, DF : T, C. unde permutando S, CF : T, DF : : (R : T, C : :) coT, C : R. est autem S, CF = coS, BC & T, DF = coT, B. quare est R × coS, BC = coT, C × coT, B. hoc est, Radius ductus in sinum partis mediæ æquatur

producto

producto ex Tangentibus partium adjacentium extremarum.

Eidem parti mediæ, scil. complemento BC, adsunt extremæ oppositæ AB AC, & (per prop. 26.) est coS, BA : coS, BC : : R : coS, AC. quare erit R x coS, BC = coS, BA x coS, AC.

Cas. 3. Sit denique AB pars media, & erunt complementum anguli B & AC extremæ adjacentes, (& per pr. 27.) S, AB : R : : T, CA : TB. unde erit S, AB : T, CA : : (R : T,B : :) coT, B : R. adeoque erit R x S, AB = T,CA x coT, B.

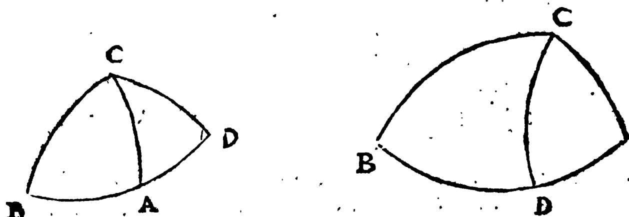
Præterea parti mediæ AB, complementum BC, & complementum anguli C sunt extremæ oppositæ; & in triangulo GHD (per prop. 25.) Est coS, D : S, DGH : : coS, GH : R. est vero coS, D = coS, AE = S, AB, & S. G = S, IF = S, BC. Item est coS, GH = S, HI = S, C. quare erit S, AB : S, BC : S, C : R. & hinc R x S, AB = S, BC x S, C.

Itaque in omni casu, rectangulum sub radio & sinu partis mediæ æquale erit tam rectangulo sub cosinubus extremarum oppositarum, quam rectangulo sub tangentibus extremarum adjacentium. Et proinde si æquationes illæ resolvantur in Analogias (per 16. Elem. 6.) ope regulæ Proportionis, partes ignotæ innotescent. Et si pars quæsita sit media, primus Analogiæ terminus erit Radius, secundam & tertium occupant locum tangentes vel cosinus partium extremarum. Si vero quæratur extremarum una, Analogia incipi debet cum altera, atque Radius sinusque partis mediæ, in mediis ponantur locis, ut quartum teneat pars quæsita.

IN Triangulis Sphæricis obliquangulis BCD, demissio arcu perpendiculari AC, ab angulo C in basim BD, (productam si opus fuerit,) ut duo fiant Triangula BAC DAC rectangula; eorum ope resolvi possunt plerique casus Triangulorum obliquangulorum.

PROP. XXXI.

Cosinus angulorum B & D ad basim B D, sinubus angulorum verticalium B C A D C A sunt proportionales.



Nam coS, ang. B : S, B C A : : (coS, C A : R : :) coS, D : S, D C A (per 25. hujus.)

PROP. XXXII.

Cosinus laterum B C D C sunt proportionales cosinubus basium B A D A.

Est enim coS, B C : coS, B A : : (coS, C A : R : :) coS, D C : coS, D A. (per 26. hujus.)

PROP. XXXIII.

Sinus basium B A D A, sunt in reciproca proportione tangentium angulorum B & D ad Basim B D.

Quia per 27. hujus est, S, B A : R : : T, A C : T, anguli B. Item per eandem, inverse R : S, D A : : T, ang. D : T, A C. erit ex æquo in perturbata ratione (per 23. El. 5.) S, B A : S, D A : : T, ang. D : T, ang. B.

PROP. XXXIV.

Tangentes laterum B C D C sunt in reciproca proportione cosinuum angulorum verticalium B C A, D C A.

Quia

Quia per 28. hujus permutando, Est

T,BC : R :: T,CA : coS,BCA

& per eandem R : coS,DCA : T,DC : T,CA

quare ex æquo in perturbata ratione est.

T,BC : coS,DCA :: T,DC coS,BCA.

PROP. XXXV.

Sinus laterum BC DC sinubus angulorum oppositorum B & D sunt proportionales.

Quia per 29. hujus S,BC : R :: S,CA : S, ang. B, & per eandem inverse R : S,DC :: S, ang. D : S,CA erit ex æquo in perturbata ratione S,BC : S,DC :: S,D : S,B.

PROP. XXXVI.

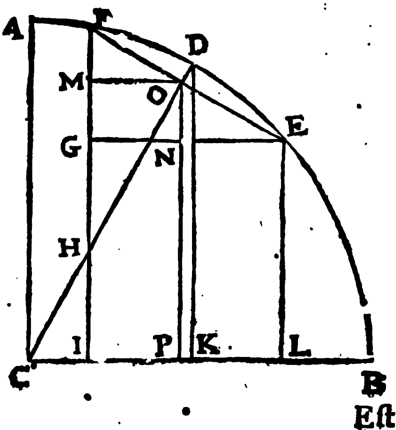
In Triangulo quovis Sphærico ABC, CF × AE vel FM × AE, rectangulum sub sinubus crurum BC BA est ad radii quadratum, ut IL seu IA — LA differentia sinuum versorum Basis AC, & differentiæ crurum AM, ad GN sinum versum anguli B.

Polo B describatur circulus maximus PN; sintque BP BN

BN quadrantes; & PN est mensura anguli B; eodem polo B per C describatur circulus minor CFM; horum circulorum plana recta erunt plano BON, (per 2. h.) & PG CH perpendiculares in idem planum, cadent in communes sectiones ON FM puta in G & H. ducatur HI perpendicularis ad AO, & planum per CH HI perpendiculare erit plano AOB, unde AI perpendicularis ad HI, erit perpendicularis ad rectam CI, (per def. 4. El. 11.) est itaque AI sinus versus arcus AC, & AL sinus versus arcus AM = BM — BA = BC — BA. Triangula Isoscelia CFM PON sunt æquiangula ob MF NO item CF PO parallelas (per 16. El. 11.) quare demissis perpendiculis CH PG in latera FM ON, similiter divisa erunt Triangula; & erit FM : ON :: MH : GN. Itemque ob triangula AOE DIH DLM æquiangula erit AE : AO :: IL : MH at ostensum est, esse FM : ON :: MH : GN quare erit AE × FM ad AO × ON ut IL × MH, ad MH × GN seu ut IL ad GN. hoc est rectangulum sub sinubus crurum est ad quadratum Radii ut differentia sinuum versorum basis & differentiæ crurum BC BA ad sinum versum anguli B. Q. E. D.

PROP. XXXVII.

Differentia Sinuum versorum duorum arcuum ducta in dimidium radii, æqualis est rectangulo sub sinu semisummæ & sinu semidifferentiæ eorundem arcuum.



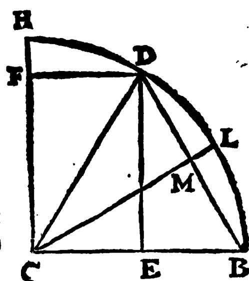
Sint duo arcus BE BF, quorum differentia EF sit bisecta in D, & erit BD semisumma arcuum, & FD semidifferentia,

Est

Est GE = IL differentiæ finuum verforum arcuum BE BF; Item est FO finus femidifferentiæ arcuum. Ob æquiangula triangula CDK FEG; erit DK : GE : : (CD : FE : :) $\frac{1}{2}$CD : $\frac{1}{2}$FE. Unde est DK × $\frac{1}{2}$FE feu DK × FO = GE × $\frac{1}{2}$CD = IL × $\frac{1}{2}$CD. Q. E. D.

PROP. XXXVIII.

Sinus verfus cujufvis arcus, ductus in dimidium Radii, æqualis eft quadrato finus dimidii ejufdem arcus.



Triangula CBM DEB funt æquianqula ob angulos ad M & E rectos & angulum ad B communem. Quare est EB : BD : : BM : BC erit itaque EB × BC = BM × BD & EB × $\frac{1}{2}$BC = BM × $\frac{1}{2}$BD = BMq. Q. E. D.

PROP. XXXIX.

In quolibet Triangulo ABC, cujus crura angulum B continentia fint BC AB, & bafis AC eundem angulum fubtendat; fi capiatur AM arcus = differentiæ crurum = BC — AB. erit Rectangulum fub finubus crurum BC BA ad quadratum Radii ut Rectangulum fub finu arcus $\frac{AC + AM}{2}$ *& finu arcus* $\frac{AC - AM}{2}$ *ad Quadratum finus dimidii anguli B.*

Vide Fig. Prop. 36. hujus.

Quoniam est rectangulum fub finubus crurum AB BC ad quadratum radii, ut IL ad finum verfum anguli B vel ut $\frac{1}{2}$R × IL ad $\frac{1}{2}$R ductum in finum verfum anguli B (per prop. 36. hujus) Et autem $\frac{1}{2}$R × IL = rectangulo fub

ſub ſinubus arcuum $\frac{AC+AM}{2}$ & $\frac{AC-AM}{2}$ (per pr. 37. hujus.) Item eſt $\frac{1}{2}$ R ductus in ſinum verſum anguli B æqualis Quadrato ſinus dimidii anguli B. Quare erit Rectangulum ſub ſinubus crurum, ad Radii quadratum, ut Rectangulum ſub ſinubus arcuum $\frac{AC+AM}{2}$ & $\frac{AC-AM}{2}$ ad Quadratum ſinus dimidii anguli B. Q. E. D.

Sequuntur duodecim Caſus Triangulorum Sphæricorum obliquangulorum.

	Datis.	Quær.	Fiat. *Vide Fig. Prop.* 31.
1	Ang. B, D. & B C.	Ang. C.	coS, B C : R : : T, B : coT, B C A (per 30. hujus.) Item coS, B : S, B C A : : coS, D : S, D C A (per 31. hujus.) Horum angulorum B C A D C A ſumma, ſi perpendicularis cadat intra triangulum, vel differentia, ſi extra cadat; erit = B C D. Num perpendicularis cadat intra vel extra, cognoſcitur ex affectione angulorum B & D (per 22. hujus) quod ſemel monuiſſe ſufficiat.
2	Ang. B, C, & latere B C.	Ang. D.	coS, B C : R : : T, B : coT, B C A (per 30. hujus) & S, B C A : S, D C A : : coS, B : coS, D (per 31. hujus) Si B C A ſit minor B C D, angulus D erit ejuſdem affectionis cum angulo B. Sin B C A ſit major B C D, anguli B & D erunt affectionis diverſæ per converſam pr. 22.
3	BC CD lateribus & ang. B.	B D latus.	R : coS, B : : T, B C : T, B A. (per 28. hujus) & coS, B C : coS, B A : : coS, D C : coS, D A (per 32. hujus) horum B A D A ſumma vel differentia, prout perpendicularis cadit intra, vel extra Triangulum, eſt æqualis B D; quod cognoſci nequit niſi cognita ſit ſpecies alterius anguli D. Datis.

	Datis.	Quær.	Fiat.
4	BC DB lateribus & ang. B.	C D latus.	R : coS, B : : T, B C : T, B A (per 28 hujus.) Et coS, B A : coS, B C : : coS, D A : coS, D C. (per 32. h.) Prout D A similis est aut dissimilis C A vel ang. B D C, erit D C minor aut major Quadrante (per 19 & 20 hujus.)
5	B, D, ang. & BC latere.	B D latus.	R : coS, B : : T, B C : T, B A (per 28. hujus.) Et T, D : T B : : S, B A : S, D A (per 33. hujus) quorum B A D A summa vel differentia = B D.
6	BC BD lateribus & ang. B.	Ang. D.	R : coS, B : : T, B C : T, B A.(per 28.hujus.) Et S, D A : S, B A : : T, B :T, D (per 33. hujus.) Prout B D minor est aut major quam B A, angulus D similis aut dissimilis erit angulo B. (per 22. hujus.)
7	BC DC lateribus & ang. B.	Ang. C.	coS, B C : R : : coT, B : T, B C A (per 33. h.) Et T, D C : T, B C : : coS, B C A : coS, D C A (per 34. hujus.) Angulorum B C A D C A summa aut differentia, prout perpendicularis cadit intra vel extra triangulum, est æqualis angulo B C D.
8	B, C, ang. & BC latere.	D C latus.	coS, B C : R : : coT, B : T, B C A. (per 30. hujus. Item coS, D C A : coS, B C A : T, B C : T, D C (per 34. h.) Si angulus D C A similis sit angulo B (hoc est, si A D sit similis C A) erit D C minor quadrante. Si anguli D C A & B sint dissimiles, erit D C quadrante major, quod sequitur (ex pr. 18 19 & 20 h.)
9	BC DC lat. & ang. B.	D. ang.	S, C D : S, B : : S, B C : S, D qui ambiguus est. Analogia sequitur (ex prop. 35. hujus.)
10	B D ang. & BC lat.	D C	S, D : S, B C : : S, B : S, D C quod latus ambiguum est.

	Datis.	Quær.	Fiat.
11	AB BC CA omnibus lateribus *vide fig. pr.* 36.	Ang. B.	Rectangulum sub sinubus crurum AB BC: quadratum Radii :: rectangulum sub sinubus arcuum $\frac{AC+AM}{2}$ $\frac{AC-AM}{2}$: Quadrato sinus ½ ang. B. per prop. 39.
12	GHD omnibus. ang.	GD latus.	*Vide fig. prop.* 14. In Triangulo XNM, Est MN complementum anguli GHD ad semicirculum. XM complementum anguli G & XN complementum anguli D. & angulus X complementum est lateris GD ad semicirculum. Quare mutatis angulis in latera, & lateribus in angulos; eadem est operatio quæ est in casu 11 hujus, cum arcus & eorum complementa ad semicirculos habeant eosdem sinus.

DE

DE
Natura & Arithmetica
LOGARITHMORUM
PRÆFATIO.

INgens olim compendium accepit Mathesis, primo characterum Indicorum, deinde Fractionum decimalium introductione; non minus tamen adjumenti ex Logarithmis, quam ex utroque invento, ei accessit: quorum quidem usum, per omnes disciplinas mathematicas latissime patentem, quis iis studiis vel leviter imbutus ignorat? Horum ope numeri fere immensi & aliàs plane intractabiles sine ullo tædio in ordinem coguntur: præsentissimum horum auxilium ubique conspicitur, sive cursum navis dirigat Nauta, sive curvarum altiorum indolem investiget Geometra, sive stellarum loca exquirat Astronomus, sive alia naturæ phænomena explicet Physicus, sive demum pecuniæ ex usuris incrementum computet Nummatus.

Argumento, in quo versatur hic libellus, illustrando non defuerunt viri in re Mathematica primarii. Sed eorum alii omnem illius ambitum complexi, doctissimè illi quidem, sed magistris solum scripserunt: alii ad Tyronum captum se accommodantes, certas quasdam, easque magis obvias Logarithmorum proprietates selegerunt, intimam eorum naturam non aperuerant. Quod igitur adhuc desiderari videbatur, mihi in animo erat supplere hoc tractatu, qui in id præcipue collimat, ut Logarithmorum scientia iis, qui ultra Arithmeticæ speciosæ & Geometriæ elementa non processerunt, penitus aliquando pateat.

Mirabile

Mirabile Logarithmorum Inventum Nepero Scoto Merchestonii *Baroni debetur, qui primus canonem Logarithmorum descripsit, construxit, & edidit,* Edinburgi *Anno* 1614. *Hunc statim omnes Mathematici, ejus utilitatem suspicientes, grati arripuerunt. Et cum de aliis fere omnibus præclaris Inventis plures contendunt Gentes, omnes tamen* Neperum *Logarithmorum authorem agnoscunt, qui tanti inventi gloria solus sine æmulo fruitur.*

Aliam deinde magis commodam Logarithmorum formam Neperus *excogitavit, & communicato consilio cum Domino* Henrico Briggio, *Geometriæ in Academia* Oxoniensi *Professore, hunc socium operis sibi adjunxit, ut Logarithmos in meliorem formam reductos compleret. Sed* Nepero *demortuo, totum quod restabat onus in* Briggium *devolutum est, qui magno labore, & summa qua pollebat ingenii subtilitate, canonem Logarithmicum secundum novam illam formam composuit, pro viginti primis numerorum chiliadibus* (*seu ab* 1 *usque ad* 20000) *aliisque undecim ab* 90000 *usque ad* 101000, *pro quibus omnibus numeris, supputavit Logarithmos quatuordecim figurarum locis constantes. Hic canon editus est* Londini *anno* 1624.

Eundem Canonem iteratò edidit Goudæ *apud* Batavos *anno* 1628. Adrianus Vlacq, *suppletis, ut docuerat* Briggius, *chiliadibus intermediis prius omissis; sed brevioribus usus est Logarithmis, utpote qui ad decem tantum figurarum loca continuantur.*

Computavit etiam Briggius *Logarithmos Sinuum & Tangentium, pro singulis Gradibus graduumque centesimis, ad* 15 *figurarum loca, quibus adjunxit sinus Tangentes & secantes veros seu naturales, quos prius ad totidem loca supputaverat. Logarithmi sinuum & Tangentium dicuntur sinus & Tangentes Artificiales. ipsi vero sinus & Tangentes, naturales vocantur. Has Tabulas simul cum Tractatu de Tabularum constructione & usu, post mortem* Briggii, *sub nomine* Trigonometriæ Britannicæ *edidit* Henricus Gelibrand Londini *Anno* 1633.

Post illud tempus, pluribus in locis Tabularum compendia

dia

dia prodiere. In quibus sinus Tangentes, eorumque Logarithmi, tantum constant septem notarum locis, & numerorum Logarithmi exhibentur tantum pro numeris ab 1 *usque ad* 10000, *qui pro plerisque casibus sufficere possunt.*

Harum Tabularum dispositio ea mihi videtur optima, quam primus excogitavit Nathaniel Roe Anglus Suffolciensis, *quamque, quibusdam in melius mutatis, sequitur* Sherwinus *in Tabulis suis Mathematicis* Londini *Anno* 1705 *editis, in quibus habentur Logarithmi Numerorum omnium ab unitate usque ad* 101000 *septem figurarum notis constantes, Logarithmorum quoque differentiæ partesque proportionales adscribuntur, quarum ope Logarithmi numerorum usque ad* 10000000 *facile haberi possunt; quatenus scil. hi Logarithmi septem tantum figurarum notis exprimantur. Præterea in iisdem prostant Sinus Tangentes & Secantes, cum eorum Logarithmis & differentiis pro quolibet gradu & minuto Quadrantis, cum aliis quibusdam tabulis Mathesi Practicæ inservientibus.*

CAPUT

CAPUT I.

De ortu & natura Logarithmorum.

QUemadmodum in Geometria, linearum magnitudines numeris sæpe definiuntur; ita quoque in Arithmetica viciſſim expedit, ut numeri aliquando per lineas exponantur, aſſumendo ſcil. lineam aliquam quæ ipſam unitatem repræſentet, ejus dupla numerum binarium, tripla ternarium, dimidia fractionem $\frac{1}{2}$, & ita deinceps, exponet. Hac ratione quorundam numerorum Geneſis & proprietates melius concipiuntur, clariuſque in animo verſantur, quam per abſtractos numeros fieri poſſit.

Hinc ſi quælibet linea a in ſeipſam ducatur, (*Fig.* 1.) quæ exinde prodit quantitas a^2, non æſtimanda eſt tanquam duarum dimenſionum, ſive ut Quadratum Geometricum cujus latus eſt linea a, ſed tanquam linea quæ ſit tertia proportionalis lineæ pro unitate aſſumptæ, & lineæ a. Sic etiam ſi a^2 per a multiplicetur, quæ prodit a^3, non erit trium dimenſionum quantitas, ſeu cubus Geometricus, ſed linea quæ eſt quartus terminus in progreſſione Geometrica cujus primus terminus eſt 1, ſecundus a. Nam termini 1 a a^2 a^3 a^4 a^5 a^6 a^7 &c. ſunt in continua ratione 1 ad a: & indices terminis affixi oſtendunt locum ſeu diſtantiam, quam quiſque terminus ab unitate obtinet. v. gr. a^5 eſt in quinto loco ab unitate, a^6 in ſexto ſeu ſexies magis diſtans ab unitate quam a ſeu a^1, qui immediate ſequitur unitatem.

Si inter terminos 1 & a inſeratur medius proportionalis qui eſt $\sqrt{a}$, ejus index erit $\frac{1}{2}$, nam ejus diſtantia ab unitate erit ſemiſſis diſtantiæ a ab unitate, adeoque pro $\sqrt{a}$ ſcribi poteſt $a^{\frac{1}{2}}$. Et ſi inter a & a^2 inſeratur medius proportionalis, ejus index erit $1\frac{1}{2}$ ſeu $\frac{3}{2}$, nam ejus diſtantia erit ſeſquialtera diſtantiæ ipſius a ab unitate.

Si inter 1 & a inſerantur duo medii proportionales; horum

horum primus est radix cubica ipsius a, cujus index debet esse $\frac{1}{3}$. Nam terminus ille distat ab unitate tertiâ tantum parte distantiæ ipsius a, adeoque radix cubica scribi debet per $a^{\frac{1}{3}}$. Hinc Index ipsius Unitatis est o, nam unitas non distat à seipsâ.

Eadem series quantitatum Geometrice proportionalium continuari potest utrinque, tam descendendo versus sinistram, quam ascendendo versus dextram; termini enim $\frac{1}{a^5}$ $\frac{1}{a^4}$ $\frac{1}{a^3}$ $\frac{1}{a^2}$ $\frac{1}{a}$ 1 a a^2 a^3 a^4 a^5 &c. sunt omnes in eadem progressione Geometrica. Adeoque cum distantia ipsius a ab unitate sit versus dextram & positiva seu $+ 1$, distantia æqualis in contrariam partem, scil. distantia termini $\frac{1}{a}$ erit negativa seu $- 1$, qui erit index termini $\frac{1}{a}$ pro quo itaque scribi potest a^{-1}. Similiter in termino a^{-2}, index $- 2$ ostendit terminum in secundo loco ab unitate versus sinistram locari, idemque valet terminus a^{-2} ac $\frac{1}{a^2}$. Item a^{-3} est idem ac $\frac{1}{a^3}$. Indices enim hi negativi ostendunt terminos ad quos pertinent, in partem discedere contrariam ei, quâ ab unitate progrediuntur termini, quorum indices sunt positivi. Hisce præmissis.

Si super linea AN utrinque indefinite extensâ, (*Fig.* 2.) capiantur AC CE EG GI IL dextrorsum. Item AΓ ΓΠ &c. sinistrorsum, omnes inter se æquales: & ad puncta Π Γ A C E G I L erigantur super AN perpendiculares rectæ ΠΣ ΓΔ AB CD EF GH IK LM quæ sint omnes continue proportionales, numerosque representent, quorum AB sit unitas. Lineæ AC AE AG AI AL $-$ AΓ $-$ AΠ distantias numerorum ab unitate respective exponent, sive locum & ordinem quem quisque numerus in serie Geometrice proportionalium obtinet, prout ab unitate distat. In AG cum sit tripla rectæ AC, erit numerus GH in tertio ab unitate loco, si modo CD sit in primo, sic LM erit in quinto loco cum sit AL $=$ 5 AC.

Quod si proportionalium extremitates ΣΔ B D F H K M rectis lineis jungantur; figura Σ h L M fit polygonum pluribus aut paucioribus constans lateribus, prout plures aut pauciores in progressione fuerint termini.

Si partes A C C E E G G I I L bisecentur in punctis *c e g i l* & rursus excitentur perpendiculares *c d e f g h i k l m*, quæ sint mediæ proportionales inter A B, C D, C D E F, E F G H, G H I K, I K L M, nova orietur proportionalium series, cujus termini incipiendo ab eo qui proxime sequitur unitatem duplo plures sunt, quam in prima serie, & terminorum differentiæ minores fiunt, propiusque ad rationem æqualitatis accedunt termini, quam prius; quin etiam in hac nova serie, rectæ A L A C distantias terminorum L M C D ab unitate exponent, scil. cum A L decies major sit quam A *c*; erit L M decimus seriei terminus ab unitate, & ob A *e* triplo majorem quam A *c*, erit *e f* tertius seriei terminus, modo *c d* sit primus: & inter A B & *e f* erunt duo medii proportionales, inter A B vero & LM erunt novem termini medii proportionales.

Quod si linearum extremitates B *d* D *f* F *h* H &c. rectis jungantur, fiet novum polygonum, pluribus quidem, at brevioribus constans lateribus.

Si rursus distantiæ A *c* *c* C C *e* *e* E &c. bisecari concipiantur, & inter binos quosque terminos, ad medias illas distantias inseri intelligantur medii proportionales, alia nova orietur proportionalium series, terminos ab unitate duplo plures continens quam prior. Terminorum vero differentiæ minores erunt; junctisque terminorum extremitatibus, numerus laterum polygoni augetur secundum numerum terminorum, minora autem erunt latera, ob diminutas terminorum à se invicem distantias.

Quin in hac nova serie, distantiæ A L A C &c. determinabunt terminorum ordines seu locos, nempe si sit A L quintuplo major quam A C; sitque C D quartus ab unitate seriei terminus; erit L M istius seriei terminus vicesimus ab unitate.

Si sic continuo inter binos quosque terminos inserantur medii proportionales, fiet tandem numerus terminorum

rum

rum ſeriei, ſicut & laterum polygoni major quolibet dato numero ſeu infinitus; latera vero ſingula magnitudine diminuta fient quavis datâ rectâ lineâ minora; Adeoque mutabitur polygonum in figuram curvilineam. Nam quælibet figura curvilinea conſiderari poteſt, tanquam polygonum cujus latera ſunt numero infinita, & magnitudine minima.

Curva ſic deſcripta dicitur *Logarithmica*, in qua ſi numeri per rectas ad axem A N normaliter inſiſtentes, repreſententur; portio Axis inter numerum quemlibet, & Unitatem intercepta, oſtendit locum ſeu ordinem quem numerus ille obtinet in ſerie Geometrice proportionalium, & æqualibus intervallis ab invicem diſtantium. Verbi gratia, ſi A L ſit quintuplo major quam A C, ſintque ab unitate ad L M mille termini continue proportionales, erunt ab unitate ad C D ducenti termini ejuſdem ſeriei, ſeu erit C D terminus ſeriei ducenteſimus ab unitate; & quicunque ſupponatur numerus terminorum ab A B ad L M, erit iſtius numeri pars quinta numerus terminorum ab A B ad C D.

Curva Logarithmica poteſt etiam concipi duobus motibus deſcribi, quorum unus æquabilis eſt, alter vero in data quadam ratione acceleratur, vel retardatur: v. gr. ſi recta A B ſuper A N uniformiter incedat adeo ut terminus ejus A æqualibus temporibus æqualia ſpatia deſcribat, interea tamen ita creſcat A B, ut æqualibus etiam temporibus incrementa capiat, quæ ſint toti lineæ creſcenti proportionalia, hoc eſt ſi A B progrediendo in *c d*, augeatur parte ſui *o d*, & hinc æquali tempore quando in C D pervenerit, augeatur ſimili parte D*p*, quæ ſit ad *d c* ut incrementum *d o* ad A B, ſimiliter, dum æquali tempore ad *e f* pervenerit, creſcat parte *f q*, quæ ſit ad D C ut D*p* ad *d c* ſeu ut *d o* ad A B, id eſt, in æqualibus temporibus incrementa facta ſint ſemper totis proportionalia.

Vel ſi linea A B regrediendo in contrariam partem, in conſtanti ratione minuatur, ita ut, dum æqualia ſpatia A Γ Γ Π pertranſit, decrementa patiatur A B — Γ Δ Γ Δ — Π Σ quæ ſint ipſis A B Γ Δ proportionalia. Lineæ ſic creſcentis aut decreſcentis terminus Logarithmicam deſcribet,

Nam cum sit AB : *do* :: *dc* : D*p* :: DC : *fq* erit componendo AB : *dc* :: *dc* : DC :: DC : *fe* & ita deinceps.

Per hos duos motus, unum scil. æquabilem, alterum proportionaliter accleratum aut retardatum, ipse *Neperus* Logarithmorum originem exposuit. Logarithmum sinus cujusque arcus vocavit, *Numerum qui quam proxime definit lineam quæ æqualiter crevit, interea dum sinus totius linea proportionaliter in sinum illum decrevit.*

Ex hac Logorithmicæ descriptione constat, numeros omnes in æqualibus distantiis, esse continue proportionales. Quin etiam patet, quod si sint quatuor numeri AB CD IK LM tales, ut distantia inter primum & secundum sit æqualis distantiæ inter tertium & quartum, qualiscunque sit distantia secundi à tertio, erunt illi numeri proportionales. Nam quia distantiæ AC IL sunt æquales, erit AB ad incrementum D*s* ut IK ad incrementum MT; unde componendo AB : DC :: IK : ML. Et vicissim, si quatuor numeri sint proportionales, erit distantia inter primum & secundum, æqualis distantiæ inter tertium & quartum.

Distantia inter duos quoslibet numeros, dicitur Logarithmus rationis istorum numerorum, & metitur non quidem ipsam rationem, sed numerum terminorum in data serie Geometrice proportionalium progredientium ab uno numero ad alterum, definitque numerum rationum æqualium, quarum compositione efficitur numerorum ratio.

Si distantia inter duos quosvis numeros sit dupla distantiæ inter alios duos numeros; Ratio duorum priorum numerorum erit duplicata rationis posteriorum. Sit enim distantia IL inter numeros IK LM dupla distantiæ A*c* quæ est inter numeros AB *cd*, bisecta IL in *l* ob A*c* = I*l* = *l*L, erit ratio IK ad *lm* æqualis rationi AB ad *cd*, adeoque ratio IK ad LM quæ est duplicata rationis IK ad *lm*, (per *defin.* 10. *El.* 5.) erit etiam duplicata rationis AB ad *cd*.

Similiter si distantia EL sit tripla distantiæ AC; erit Ratio EF ad LM triplicata rationis AB ad CD. Nam ob distantiam triplam, triplo plures erunt proportionales ab

ab EF ad LM quam sunt ejusdem rationis termini ab AB ad CD. at tam ratio EF ad LM, quam ratio AB ad CD, componitur ex rationibus æqualibus intermediis, (per 5. *defin. El.* 6.) Adeoque ratio EF ad LM ex triplo pluribus rationibus composita, Triplicata erit rationis AB ad CD. Similiter si sit GL distantia quadrupla distantiæ A *c*, erit ratio GH ad LM Quadruplicata rationis AB ad *cd*. & ita deinceps.

Numeri cujuslibet Logarithmus, est Logarithmus rationis Unitatis ad ipsum numerum, vel est distantia inter unitatem & illum numerum. Logarithmi itaque exponunt dignitatem, locum, seu ordinem, quem quisque numerus obtinet ab unitate in serie Geometrice proportionalium. Verbi gratia si ab unitate ad numerum 10 sint proportionales numeri 10 000 000 hoc est si sit numerus 10 in loco 10 000 000mo; per computationem invenietur, esse in eadem serie ab unitate usque ad 2 proportionales terminos numero 3 010 300, hoc est numerus binarius stabit in loco 3 010300mo. Similiter ab unitate usque ad 3, invenientur termini proportionales 4 771 213, qui numerus definit locum numeri ternarii. Numeri 10 000000, 3 010300, 4771213. erunt Logarithmi numerorum 10, 2, & 3.

Si primus seriei terminus ab unitate dicatur y, erit secundus terminus y^2, tertius y^3, &c. cumque ponitur numerus denarius seriei terminus 10 100 000^{mus}, erit $y^{10000000} = 10$. Item erit $y^{3010300} = 2$. Item $y^{4771213} = 3$, & ita deinceps.

Omnes itaque numeri erunt potestates aliquæ illius numeri, qui est ab unitate primus. Et potestatum indices sunt numerorum Logarithmi.

Cum Logarithmi sint distantiæ numerorum ab unitate, ut superius ostensum est. Erit Logarithmus ipsius unitatis 0, nam unitas non distat à seipsa. At fractionum Logarithmi sunt negativi seu infra nihil descendentes, hi enim in contrariam discedunt partem; adeoque si numeri ab unitate proportionaliter crescentes habeant Logarithmos positivos, seu signo + affectos, Numeri ab unitate

similiter decrescentes, seu fractiones habebunt Logarithmos negativos, seu signo — affectos. Quod verum est quando Logarithmi æstimantur per distantias numerorum ab unitate.

At si initium capiunt Logarithmi non ab unitate integrali, sed ab unitate quæ est in loco aliquo fractionum decimalium, verbi gratia à fractione $\frac{1}{1\,00000\,00000}$; tunc omnes fractiones hac majores habebunt Logarithmos positivos, reliquæ minores, obtinebunt Logarithmos negativos, sed de hac re plura postea dicentur.

Cum in numeris continue proportionalibus D C E F G H I K &c. distantiæ CE EG GI &c. sint æquales, erunt horum numerorum logarithmi AC AE AG AI &c. æquidifferentes, seu Logarithmorum differentiæ erunt æquales. Numerorum itaque proportionalium Logarithmi sunt omnes in progressione Arithmetica. Atque hinc oritur vulgaris illa Logarithmorum definitio, viz. Logarithmi sunt numeri qui proportionalibus adjuncti, æquales servant differentias.

In prima quam *Neperus* edidit Logarithmorum specie, posuit terminorum proportionalium ab unitate primum, tantum ab unitate distare, quantum ipse terminus unitatem superabat. h. e. Si *vn* sit primus seriei terminus ab unitate AB, ejus Logarithmum seu distantiam A*n* vel B*y* æqualem esse voluit ipsi *vy*, seu incremento numeri supra unitatem, ut si *vy* sit 1, 0000001, ejus Logarithmum A*n* ponebat 0, 0000001, & hinc computatione factâ Numerus Denarius seu 10 erit 23025850[us] seriei terminus, qui itaque numerus est Logarithmus denarii in hac Logarithmorum forma, & exprimit ejus distantiam ab unitate in partibus quarum *vy* vel A*n* est una.

At hæc positio omnino arbitraria fuit, potest enim distantia primi termini, ad ipsius excessum supra unitatem, datam quamvis habere proportionem, & pro varia illa ratione, quæ pro arbitrio supponi potest, esse inter *vy* & B*y*, incrementum primi termini supra unitatem & ejusdem

dem ab unitate distantiam, diversæ provenient Logarithmorum formæ.

Primam hanc Logarithmorum speciem in aliam magis commodam postea mutavit *Neperus*, in qua posuit numerum denarium non esse 23025850^{mum} seriei terminum, sed terminum 10000000^{mum}, inque hac Logarithmorum forma, primum incrementum vy erit ad distantiam By vel Au, ut unitas seu A B ad fractionem decimalem, 0, 4342994, quæ itaque exponet Longitudinem subtangentis A T. *In Fig.* 4ta.

Post mortem *Neperi*, vir summus Dominus *Henricus Briggius*, immenso labore, Logarithmorum Tabulas ad hanc formam construxit & edidit. In hisce tabulis cum logarithmus denarii seu ejus distantia ab unitate ponatur 1, 0000000, sintque 1, 10, 100, 1000, 10000 &c. continue proportionales, erunt æquidistantes. Quare numeri 100 Logarithmus erit 2, 0000000. millenarii 3, 0000000 & numeri 10000 Logarithmus fiet 4, 0000000 & ita deinceps.

Hinc Logarithmi omnium numerorum inter 1 & 10 incipere debent per 0, seu debet esse 0 in primo loco versus sinistram, sunt enim minores quam Logarithmus numeri 10 cujus initium est unitas; & Logarithmi numerorum inter 10 & 100 unitate incipiunt, sunt enim majores quam 1. 0000000 & minores quam 2. 0000000. Item Logarithmi numerorum inter 100 & 1000 binario incipiunt, sunt enim majores quam logarithmus numeri 100, quem incipit 2, & minores logarithmo numeri 1000 qui incipit per 3; eodem modo ostendetur in Logarithmis numerorum inter 1000 & 10000, primam figuram versus sinistram debere esse 3; & in Logarithmis numerorum ab 10000 usque ad 100000 prima versus sinistram figura erit 4, & ita deinceps.

Prima cujusque logarithmi figura versus sinistram dicitur characteristica seu index; quia ostendit altissimum seu remotissimum locum numeri à loco unitatum. v. gr. Si index logarithmi sit 1, numeri respondentis altissimus seu remotissimus versus sinistram ab unitate locus, erit

locus

locus decadum. Si index 2, remotiſſima numeri reſpondentis figura erit in ſecundo ab unitatum loco, hoc eſt erit centenariorum aliquis. Et index Logarithmi 3 denotat altiſſimam numeri ſui figuram eſſe in tertio ab unitatum loco, & inter millenarios locari.

Logarithmi numerorum omnium qui ſunt in progreſſione decupla aut ſubdecupla, characteriſticis ſeu indicibus ſuis tantum differunt; in reliquis omnibus locis, iiſdem ſcribuntur notis, v. gr. Logarithmi numerorum 17, 179, 1700, 17000. nam cum ſit 1 ad 17, ut 10 ad 170, ut 100 ad 1700, ut 1000 ad 17000; diſtantiæ inter 1 & 17, inter 10 & 170, inter 100 & 1700, inter 1000 & 17000 erunt omnes æquales, ideoque cum diſtantia inter 1 & 17 ſeu Logarithmus numeri 17 ſit 1. 2304489 erit logarithmus numeri 170 = 2. 2304489, & Logarithmus numeri 1700 erit 3. 2304489 ob numeri 100 Logarithmum = 2. 0000000, & ſimiliter ob numeri 1000 Logarithmum = 3. 0000000 Logarithmus numeri 17000 erit 4. 2304489.

Sic etiam numeri 6748. 674, 8. 67, 48. 6, 748. 0,6748, 0, 06748. ſunt continue proportionales ſcil. in ratione 10 ad 1, eorum itaque à ſe invicem diſtantiæ æquales erunt diſtantiæ ſeu Logarithmo numeri 10, ſeu æquales 1, 0000000. quare cum Logarithmus numeri 6748 ſit 3, 8291751, reliquorum logarithmi erunt ut in margine.

6748	3,8291751
674,8	2,8291751
67,48	1,8291751
6,748	0,8291751
0,6748	—1,8291751
0,06748	—2,8291751

In duobus ultimis logarithmis, Indices tantum ſunt negativi, reliquis figuris poſitivis manentibus, adeoque cum reliquæ figuræ addendæ ſunt, ſubtrahendi erunt indices, & vice verſa.

CAPUT

CAPUT II.

De Logarithmorum Arithmetica ubi numeri sunt integri, vel integri cum decimalibus adjunctis.

QUoniam in multiplicatione, unitas est ad multiplicatorem ut multiplicandus ad productum, distantia inter Unitatem & multiplicatorem æqualis erit distantiæ inter multiplicandum & productum; si itaque numerus G H per numerum E F esset multiplicandus, distantia inter G H & productum debet esse æqualis distantiæ A E, seu Logarithmo multiplicatoris, si itaque capiatur G L æqualis A E, erit numerus L M productus, hoc est, si ad A G logarithmum multiplicandi addatur A E Logarithmus multiplicatoris, summa erit logarithmus producti.

In Divisione Unitas est ad divisorem, ut quotus ad dividendum; adeoque distantia inter divisorem & unitatem æqualis erit distantiæ inter dividendum & quotum. Sic si L M per E F esset dividendus, erit distantia E A æqualis distantiæ inter L M & quotum, adeoque si capiatur L G æqualis E A, ad G erit quotus. Hoc est, si ab A L logarithmo Dividendi, auferatur G L seu A E Logarithmus divisoris, restabit A G Logarithmus quotientis.

Atque hinc adeo, quæcunque operationes in communi Arithmetica perficiuntur multiplicando aut dividendo numeros majores, eæ omnes facilius multo, & expeditius fiunt, per additionem aut subductionem Logarithmorum.

Sit exempli gratia numerus 7589 multiplicandus per 6757 addendo Logarithmos ut in margine videre est, habetur Logarithmus producti, cujus index 7 monstrat esse in producto septem locos præter unitatum locum; & quærendo in tabulis Logarithmum hunc, vel proxime æqualem, invenio

Log.	3. 8801846
Log.	3. 8297539
Log.	7. 7099385

venio numerum respondentem minorem producto esse 51278000 & numerum producto majorem esse 51279000, quin capiendo differentias adjunctas, & partes proportionales; invenio notas ante-penultimam & penultimam esse 87, in ultimo autem seu in unitatum loco, necessario erit 3, ob septies novem = 63 adeoque verus productus erit 51278873. Si index Logarithmi esset 8 vel 9, ultima vel penultima notæ obtineri non possunt ex tabulis ubi Logarithmi tantum constat 7 figurarum locis præter characteristicam, adeoque ubi opus est, Tabulæ *Ulacquianæ*, in quibus Logarithmi sunt omnes decem notarum; vel *Briggianæ*, in quibus Logarithmi sunt quatuordecim, adeundæ erunt.

Log. 4. 8954004	
Log. 2. 4440448	
Log. 2. 4513556	

Si numerus 78596 dividendus sit per 278, substrahendo Logarithmum divisoris ex Logarithmo dividendi habetur Logarithmus quotientis, cui Logarithmo respondet, Numerus 282,719 qui itaque erit quotiens.

Cum unitas, numerus quilibet assumptus, ejus quadratus, cubus, Biquadratus, &c. sint continue proportionales, eorum à se invicem distantiæ æquales erunt. Manifestum itaque est Quadrati distantiam ab unitate, duplam esse distantiæ radicis ab eadem: distantiam cubi triplam distantiæ radicis suæ, Biquadrati distantiam esse distantiæ radicis suæ ab unitate quadruplam &c. Adeoque si duplicetur logarithmus numeri, dabitur logarithmus Quadrati; si Triplicetur, logarithmus cubi; si quadruplicetur, prodit Logarithmus Biquadrati. Et vice versa si Logarithmus numeri alicujus bisecetur, habebitur Logarithmus Radicis quadratæ ejusdem numeri; Quin & ejusdem logarithmi tertia pars erit logarithmus Radicis Cubicæ; & pars quarta Logarithmus Radicis biquadraticæ; & ita deinceps.

Hinc Radicum omnium extractiones facillime perficiuntur, secando Logarithmum in tot partes, quot sunt unitates in indice potestatis. Sic ut habeatur Radix quadrata numeri 5, ejus Logarithmi capiatur pars dimidia

dia 0. 3494850, erit hæc Logarithmus radicis quadratæ numeri 5, seu Logarithmus numeri $\sqrt{5}$, cui respondet numerus 2, 23606 quam proxime.

CAPUT III.

De Arithmetica Logarithmorum, ubi numeri sunt Fractiones.

Vide Fig. 3.

QUotiescunque Fractiones per Logarithmos tractandæ fuerint, ad vitandum laborem addendi unam Logarithmi partem, & subducendi alteram, expedit ut Logarithmi incipiant non ab unitate integrali, sed ab unitate, quæ sit in decimo vel centesimo loco fractionum decimalium, v. gr. pone P O esse $\frac{1}{1\ 00000\ 00000}$ & Logarithmos ab ejus loco incipere. Hæc fractio decies magis distabit ab unitate versus sinistram, quam numerus 10 ab eadem distat versus dextram, sunt enim Decem termini proportionales in ratione 10 ad 1 ab unitate usque ad P O. Adeoque si A B sit unitas, ejus Logarithmus in hac suppositione non erit 0, sed erit O A = 10. 0000000, Nam distantia denarii ab unitate est 1. 0000000, unde distantia numeri 10 à P O erit 11. 0000000. Item distantia numeri 100 à P O, seu ejus Logarithmus à P O incipiens, erit 12. 000 0000 & numeri 1000 Logarithmus seu distantia à P O erit 13. 000 0000; atque hac ratione Logarithmorum omnium indices augentur numero 10. & Fractiones quarum indices fuerunt — 1, aut — 2, aut — 3 &c. fiunt 9, 8, aut 7 &c.

At si Logarithmi incipiunt à loco Fractionis cujus numerator est unitas; denominator unitas centum cyphris adjectis (quod faciendum est quoties fractiones occurrant minores quam P O) illa Fractio centies plus distabit ab unitate quam 10 ab ea distat, adeoque Unitatis Logarithmus habebit Indicem 100. Numeri Denarii Logarithmus Indicem habebit 101. Et numeri centenarii Logarithmo

rithmo congruet Index 102, & ita deinceps Indices omnes augentur numero 100.

Fractionum omnium quæ sunt majores PO (à quo initium ducitur) Logarithmi erunt positivi. Et cum numeri, 10, 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, &c. sunt in continua progressione Geometrica, æqualiter à se invicem distabunt, & eorum proinde Logarithmi erunt æquidifferentes; Adeoque cum Logarithmus denarii sit 11. 0000000, & unitatis Logarithmus sit 10. 0000000 erit Logarithmus fractionis $\frac{1}{10}$ = 9. 0000000; & fractionis $\frac{1}{100}$ Logarithmus erit 8, 0000000; & similiter index Logarithmi numeri $\frac{1}{1000}$ erit 7. Quin etiam eadem ratione si index Logarithmicus Unitatis sit 100 & denarii 101, Erit index Logarithmi Fractionis $\frac{1}{10}$, 99, & Fractionis $\frac{1}{100}$ Index Logarithmi erit 98; & Fractionis $\frac{1}{1000}$ index Logarithmicus erit 97 &c. Hi indices ostendunt in quo loco ab unitate prima fractionis figura quæ cyphra non sit, ponenda fuerit. v. gr. Si index sit 4 ejus differentia ab indice unitatis quæ est 10 scil. 6 ostendit primam decimalis figuram significativam esse in 6to ab unitate loco; ergo quinque cyphræ versus sinistram ei præponendæ sunt. Ita si Unitatis index sit 100 & fractionis index sit 80, erit prima ejus figura in vicesimo ab unitatis loco seu 19 cyphræ præponendæ erunt.

Sit jam Fractio GH per fractionem DC multiplicanda. Quia unitas est ad multiplicatorem ut multiplicandus ad productum; erit distantia inter Unitatem & multiplicatorem æqualis distantiæ inter multiplicandum & productum. Quare si capiatur GI = AC, ad I erit productus IK. Et proinde si ab OG Logarithmo multiplicandi, auferatur GI vel AC, restabit OI Logarithmus producti. Est vero AC = OA — OC, quæ ablata ab OG, relinquetur OG + OC — OA = OI, hoc est, si simul addantur Logarithmi multiplicatoris & multiplicandi, & è summa auferatur Logarithmus unitatis (qui semper scribitur per 10 aut 100 cum cyphris) habebitur logarithmus producti. ex. gr. Sit Fractio decimalis 0,00734 per fractionem 0,000876 multiplicanda, pono unitatis indicem Logarithmicum esse 100, & fractionum Logarithmi erunt ut

ut in margine, qui additi, & rejecto Logarithmo Unitatis, dant Logarithmum producti, cujus index 94 ostendit primam producti figuram esse in sexto ab unitatum loco, quinque itaque cyphræ præponendæ sunt, & productus erit ,0000064298 4.

97, 8656961
96, 9425041
94, 8082002

In Divisione, Divisor est ad unitatem, ut dividendus ad quotum, & proinde distantia inter divisorem & unitatem, æqualis erit distantiæ inter dividendum & quotum. Itaque si fractio IK dividenda esset per DC, capienda erit IG = CA & locus quoti erit G. Est vero CA = OA — OC quæ ad OI addita fit OA + OI — OC = OG. hoc est si addatur Logarithmus unitatis ad Logarithmum dividendi, & è summa auferatur Logarithmus divisoris, restabit logarithmus quotientis; sic si numerus CD per IK esset dividendus, capienda erit distantia CS = IA, & erit ST quotiens; cujus Logarithmus est OA + OC — OI. Sit CD = 0, 347 IK = 0, 00478. ad logarithmum ipsius CD addatur Logarithmus Unitatis, hoc est ejus Indici præponatur 1 aut 10, & ex eo subducatur logarithmus divisoris, restabit Logarithmus quotientis, cujus index 11 monstrat quotientem esse inter numeros qui sunt à 10 ad 100. quæro itaque numerum logarithmo respondentem, quem invenio esse 72 ,594.

19, 5403295
7, 6794279
11, 8609016

Si fractionis vulgaris verbi gr. $\frac{7}{8}$ logarithmus desideretur, ad Logarithmum numeri 7 addatur Logarithmus unitatis, vel quod idem est, ejus indici præponatur 1 aut 10 & subducatur ab eo logarithmus denominatoris 8, restabit logarithmus fractionis $\frac{7}{8}$ vel fractionis decimalis ,875.

10, 8450980
0, 9030900
9, 9420080

Ut Fractionis cujuslibet DC potestates habeantur, Capiendæ sunt EC EG GI IL singulæ æquales AC, & EF erit quadratus, GH Cubus, IK biquadratus numeri DC, sunt enim ab unitate continue proportionales. Est præterea AE = 2 AC = 2 OA — 2 OC, unde OE = OA — AE = 2 OC — OA, hoc est logarithmus quadrati

drati est duplus logarithmi radicis, minus Logarithmo unitatis. Similiter ob $AG = 3AC = 3OA - 3OC$ erit $OG = OA - AG = 3OC - 2OA$ = Logarithmo cubi = Triplo Logarithmi lateris minus duplo logarithmi unitatis. Eadem ratione, quia $AI = 4AC = 4OA - 4OC$, erit $OI = 4OC - 3OA$; qui est Logarithmus Biquadrati. Et universaliter fractionis potestas sit n, logarithmus L, erit logarithmus potestatis $n = nL - nOA + OA$. hoc est multiplicando logarithmum fractionis per n, & è producto abjiciendo logarithmum unitatis multiplicatum per $n - 1$, habebitur logarithmus potestatis n ejusdem fractionis.

Ex. gr. sit Fractio $\frac{1}{20}$ = ,05 cujus quæratur potestas 6ta; hujus fractionis logarithmus est 8, 6989700 qui multiplicatus per 6 dat numerum 52, 1938200, & ex 52 ablato numero 50 qui est index Logarithmi unitatis in 5 ductus, restabit logarithmus potestatis 6tæ scil. 2, 1938200 cui respondet numerus 0 00 0000 15625. nam index 2 ostendit septem cyphras primæ figuræ præponendas esse.

Si Fractionis ,05 potestas octava desideretur, multiplicando logarithmum per 8, prodit 69, 5917600, at cum ex numero 69 auferri non potest 70, qui est septies index logarithmi unitatis, quin in numeros negativos deveniatur, pono indicem logarithmi unitatis esse 100. & index logarithmicus fractionis, erit 98. hic logarithmus in 8 ductus dat 789. 5917600 & ex numero 789 rejecto numero 700, qui utpote cum cyphris annexis, est septies logarithmus unitatis, restabit 89. 5917600 logarithmus potestatis 8væ Fractionis $\frac{1}{20}$ cui congruens numerus est 00000 00000 39062, nam cum Index sit 89 & ejus differentia ab 100 est 11; figura prima fractionis significativa erit in undecimo ab unitatis loco, adeoque decem cyphræ præponendæ erunt.

Si in fractionibus, radices potestatum desiderentur. v. gr. Fractionis EF, quæratur radix quadrata. Quoniam Radix est media proportionalis inter Fractionem & unitatem; bisectâ AE in C, erit CD radix quadrata fractionis

ctionis E F. Est vero $AC = \frac{1}{2} AE = \frac{OA - OE}{2}$, Adeoque O C Logarithmus Radicis $= OA - AC = \frac{OA + OE}{2}$. Si fractionis G H radix cubica quæratur; Radix illa erit prima duarum mediarum proportionalium inter unitatem & G H, secetur itaque A G in tres partes æquales, quarum prima sit A C, erit C D radix quæsita, & quoniam est $AC = \frac{1}{3} AG = \frac{OA - OG}{3}$ si hæc subducatur ab O A, restabit $\frac{2 OA + OG}{3} = OC$ scil. Logarithmo Radicis cubicæ fractionis G H. Sic etiam fractionis I K radix biquadratica habetur, secando A I in quatuor partes æquales. Nam Radix est prima trium mediarum proportionalium inter unitatem & Fractionem. Sit itaque $AC = \frac{1}{4} AI$, & erit C D Radix biquadratica Fractionis I K. Sed est $\frac{1}{4} AI = \frac{OA - OI}{4}$ adeoque $OC = OA - AC = \frac{3 OA + OI}{4}$.

Universaliter si fractionis L M desideretur radix potestatis n, ejus radicis Logarithmus erit $\frac{n OA - OA + OL}{n}$, hoc est si indici Logarithmico fractionis, præponatur numerus $n - 1$, & logarithmus sic auctus dividatur per n, quotus dabit Logarithmum radicis quæsitæ. Sic si quæratur radix cubica fractionis $\frac{1}{2}$ sive ,5 hujus Logarithmo præponatur $2 = n - 1$, quia radix cubica desideratur, & fiet 29. 6989700 cujus numeri triens est 9, 8996566 æqualis Logarithmo radicis cubicæ fractionis $\frac{1}{2}$ & congruens Logarithmo numerus est, 7937 qui erit radix quæsita.

CAPUT

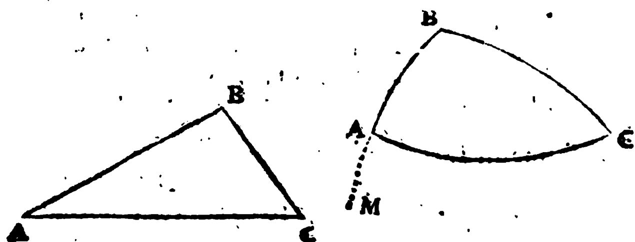
CAPUT IV.

De Regula Proportionis seu Aurea Logarithmica.

DAtis tribus numeris, qua ratione quartus proportionalis inveniendus sit, nos docet proportionis Regula; scil. termini secundus & tertius in se invicem ducendi sunt, & productus dividendus est per primum, qui prodit quotus, exhibebit quartum terminum proportionalem quæsitum. At per logarithmos minore labore habebitur ille quartus; Nam si è summa Logarithmorum secundi & tertii auferatur logarithmus primi, qui restat numerus est logarithmus quarti proportionalis.

Quin etiam & hic labor minui aliquantulum potest, si loco logarithmi primi capiatur ejus complementum Arithmeticum, seu differentia logarithmi à numero 10 0000000, & obtinetur si pro singulis logarithmi figuris scribantur earum differentiæ à 9, Complementum hoc Arithmeticum cum reliquis duobus logarithmis in unam summam conjiciatur, & è summa, unitatis nota in primo versus sinistram loco sita abjiciatur, restabit logarithmus quarti termini quæsiti; atque hoc modo per unicam Numerorum trium additionem invenitur logarithmus termini quæsiti. Hujus rei causa hinc patebit. Sint tres numeri A B C & è summa secundi & tertii subducendus est primus, non tantum operatio communi modo perficitur, sed etiam si assumatur numerus quivis E, & ab ea auferatur A, restabit E — A si numeri B C & E — A in unam summam addantur, & è summa trium rejiciatur
E, restabit B + C — A. sic si subducendus est nu-
85 merus 15 ex 23 capio numeri 15 complementum
23 ad 100 quod est 85, hunc numerum addo ad 23
108 & summa fit 108 ex quo sublato 100 restabit numerus 8. sequuntur Exempla Trigonometrica Regulæ proportionis per Logarithmos soluta.

Sit



Sit Triangulum A B C rectilineum, in quo dantur angulus A 36 gr. 46'. angulus B 98 gr. 32'. & latus B C, 3478. & quæritur latus AC. Fiat (per *caſ.* 1. Trigon. Planæ) Sinus ang. A ad Sinum ang. B ut BC ad AC. Et quia Log. ſinus anguli A eſt primus analogiæ terminus ejus vice ſubſtituo complementum Arithmeticum ejuſdem, & addo Log. B C, Log. S, B & prædictum complementum in unam ſummam, & è ſumma rejecta unitate quæ eſt in primo verſus ſiniſtram loco, dabitur Logarithmus lateris A C, cui congruens numerus eſt 5746, 309 æqualis A C lateri quæſito.

Arith. comp. S.A.	0.2228940
Log. Sin. B.	9.9951654
Log. BC	3.5413296
Log. A C.	13.7593890

Sit Triangulum Sphæricum A B C, in quo dantur omnia latera ſcil. B C = 30 grad. A B = 24 gr. 4'. & A C = 42 gr. 8'. quæritur angulus B. Producatur B A ad M ut ſit B M = B C erit A M differentia laterum B C B A æqualis 5 gr. 56'. (Per *caſ.* 11. in Triangulis obliquangulis Sphæricis.) Fiat ut rectangulum ſub ſinubus crurum A B B C ad quadratum Radii ita Rectangulum ſub ſinubus Arcuum $\frac{AC+AM}{2}$ $\frac{AC-AM}{2}$ ad quadratum ſinus anguli $\frac{1}{2}$ B.

Eſt vero $\frac{AC+AM}{2} = 24$ gr. 2'. & $\frac{AC-AM}{2} = 18$ gr. 6'. Et quia primus analogiæ terminus eſt rectangulum

 ſub

sub sinubus A B B C, & secundus terminus est quadratum Radii; Summa Log. Sin. A B BC subducenda erit ex duplo Log. Radii & qui restat numerus addendus est ad summam Log. S $\frac{AC+AM}{2}$ $\frac{AC-AM}{2}$. Quod idem erit ac si singuli Log. Sinus arcuum A B B C subducerentur à Logarith. Radii, vel si horum sinuum capiantur complementa Arithmetica, Atq; complementa illa & prædicti sinus in unam conjicerentur summam. Summa illa erit Logarithmus quadrati sinus dimidii anguli B.

Log. S, B C comp. Arith.	0. 3010300
Log. S, A B comp. Arith.	0. 3895535
Log. S $\frac{AC+AM}{2}$	9. 6098803
Log. S, $\frac{AC-AM}{2}$	9. 4923083
2 Log. S, Ang. B.	19. 7927721

Logarithmi itaque dimidium 9. 8963860 est Log. Sinus anguli $\frac{1}{2}$ B = 51 gr. 58′. 31″. & hujus anguli duplum erit 103 gr. 57′. 02″ = angulo E qui erat inveniendus.

CAPUT V.

De Proportionalium Quantitatum continuis Incrementis, Et de modo inveniendi per Logarithmos, Terminum quemlibet in serie Proportionalium, sive crescente, sive decrescente.

SI in Axe Logarithmicæ ubivis capiantur partes quot volueris S V V Y Y Q &c. æquales, & ad puncta S V Y Q &c. erigantur perpendiculares S T V X Y R Q Π &c. ex natura curvæ, erunt omnes continuè proportionales; quin etiam continua incrementa X *x* Z *z* Π *π* erunt totis proportionalia. Nam ob S T : V X :: V X : Y Z :: Y Z : Q Π erit dividendo *Vide Fig.* 3.

videndo ST : Xx :: VX : Zz :: YZ : Πϖ, & componendo VX : Xx :: YZ : Zz :: QΠ : Πϖ. Hinc si Xx sit pars quælibet rectæ ST, erit Zz eadem pars rectæ VX, & Πϖ quoque eadem pars rectæ YZ. ex. gr. Si Xx sit $\frac{1}{20}$ ST, erit Zz = $\frac{1}{20}$ VX, & Πϖ = $\frac{1}{20}$ YZ; seu quod eodem redit, erit VX = ST + $\frac{1}{20}$ ST. YZ = VX + $\frac{1}{20}$ VX, item QΠ = YZ + $\frac{1}{20}$ YZ.

Fiat ut ST ad VX, ita AB unitas ad NR; erit AN = SV; adeoque rectæ SV VY YQ &c. erunt singulæ æquales logarithmo ipsius RN, & AV Logarithmus termini VX erit æqualis AS + AN = Logarithmo ipsius ST + Logarithmo ipsius NR. Item AY Logarithmus termini YZ æqualis erit AS + 2AN = Log. ST + 2 Log. NR, & AQ logarithmus Termini QΠ æqualis erit AS + 3AN = Log. ST + 3 Log. NR. Et universaliter si Logarithmus numeri NR multiplicetur per numerum, qui exprimit terimni cujusvis distantiam à termino primo, & productus addatur Logarithmo termini primi, dabitur logarithmus istius termini. At si series proportionalium sit decrescens; seu si termini in continua ratione minuantur, & QΠ sit primus, habebitur Logarithmus alterius cujusvis termini, multiplicando Logarithmum numeri NR per numerum qui exponit ejus termini distantiam à primo, & subducendo productum è Logarithmo primi. Quod si productus ille sit major Logarithmo primi termini initio ab unitate ducto; in eo casu ponendi sunt Logarithmi incipere ab unitate in aliquo fractionum Decimalium loco detrusâ, verbi gratia ab OP ita Logarithmus numeri QΠ erit OQ.

Exponat jam LM quamvis pecuniam, seu pecuniæ summam à creditore Fœnori elocatam, ea lege ut singulis annis Usura annua sorti annumeretur, & finito primo anno, sit usura seu lucrum Kk, & IK aggregatum sortis & lucri pariat usuram *Hh* quæ sit ipsi IK proportionalis, seu in ratione constanti. Hæc usura Hh finito anno secundo, sorti accedat, & sors ea fit GH, quæ ad finem anni tertii pariat usuram Ff, ipsi GH proportionalem; Ponamus sortem singulis annis augeri parte sui vice-

 sima,

sima, $\frac{1}{20}$, adeoque erit IK = LM + $\frac{1}{20}$ LM, GH = IK + $\frac{1}{20}$ IK. EF = GH + $\frac{1}{20}$ GH, & ita deinceps. Erunt proinde termini LM IK GH EF &c. continue proportionales. Quæritur quantum aucta fuerit pecunia ad finem quotlibet annorum.

Sit LM semiobolus, Anglice *A farthing.* Ob LM ad IK ut 1 ad 1 + $\frac{1}{20}$ vel ut 1 ad 1,05. ut AB ad NR, erit NR = 1,05, cujus Logarithmus AN est 0.0211893, vel magis accurate 0.021189299I. Quæritur quantum lucri accedat semiobolo, qui sexcentis annis fænori expositus est. Multiplicetur AN per 600 productus erit 12.7135794. Huic producto addatur Logarithmus fractionis $\frac{1}{960}$ nempe 97,0177288. (nam est semibolus pars libræ $\frac{1}{960}$) summa 109.7313082 erit Logarithmus numeri quæsiti, cumque index 102 superat indicem Unitatis novenario seu 9, erunt in numero respondente novem figurarum loca supra locum Unitatum, & numerus ille in tabulis quæsitus invenietur major quam 538650000, & minor quam 538660000. Unus itaque semiobolus fænori datus, finitis sexcentis Annis, pariet libras Anglicanas plures quam 538650000; Cui summæ solvendæ vix par erit omnis illa Auri Argentique copia, quæ ab ipsa rerum origine ad hunc usque diem ex terrarum visceribus eruta est.

Exponat Q Π quamvis pecuniæ summam quam post exactum integrum annum debitor creditori solvere tenetur, sed sine usurâ. Certum est si Debitor nunc totam solveret, illum amissurum jus quod habet in usuram annuam quæ ex pecunia illa prodiret; Quin & minor summa fœnori exposita, potest post annum cum sua usura, summam Q Π adæquare. Minor illa pecuniæ summa, quæ cum sua Usura pecuniam Q Π adæquat, præsens pecuniæ Q Π valor dicitur. Sit AN Logarithmus Rationis quam sors habet ad aggregatum sortis & usuræ, hoc est, si sors sit Usuræ annuæ Vigecupla, sit AN Logarithmus numeri 1 + $\frac{1}{20}$ seu 1,05, & capiatur QY æqualis AN; erit AY Logarithmus præsentis valoris pecuniæ Q Π. Patet enim pecuniam YZ fœnori expositam finito anno parituram pecuniam Q Π, adeoque ut habeatur logarithmus præsentis valoris,

valoris, seu Y Z; ex Logarithmo A Q detrahi debet Logarithmus A N, & restabit A Y logarithmus præsentis valoris vel Y Z. Si summa Q Π non nisi post duos annos exactos debeatur; à logarithmo A Q subtrahendus est numerus 2 A N, & manebit A V logarithmus præsentis valoris, seu summæ quæ pro pecunia Q Π solvi statim debeat. Nam manifestum est pecuniam V X fœnori expositam, spatio duorum annorum, pecuniam Q Π procreaturam. Eadem ratione, si summa Q Π non nisi post tres annos debetur, à logarithmo Q Π subtrahendus erit numerus 3 A N, & qui restat A S, erit logarithmus numeri S T, seu erit S T præsens valor summæ Q Π post tres annos solvendæ. Et universaliter, si logarithmus A N multiplicetur per numerum annorum, quibus exactis debetur summa Q Π, & productus numerus ex logarithmo A Q subducatur, hac ratione dabitur logarithmus numeri, qui erit præsens valor summæ Q Π. Hinc patet si 5386500000 libræ Angl. societati alicui finitis sexcentum annis solvendæ fuerint; tantæ pecuniæ præsentem valorem, vix unum semiobolum adæquaturum.

Si in axe Logarithmicæ ordinentur ad curvam rectæ H G E F, A B C D quæ sint proportionales, & extremitates ipsarum F H D B rectis jungantur, quæ productæ cum Axe conveniant in P & K, erunt rectæ G P A K semper æquales. Nam ob G H : E F : : A B : C D. erit G H : F S : : A B : D R. Sed ob æquiangula triangula P G H H S F, Item K A B B R D æquiangula erit P G : H S : : (G H : F S : : A B : D R : :) K A : B R. Quarum proportionalium consequentes H S B R æquales sunt, Antecedentes igitur P G K A æquales erunt. Q.E.D. *Fig.* 4.

Si rectæ C D E F ad A B G H æqualiter accedant, ut tandem punctum D coincidat cum B, & punctum F cum H, rectæ D B K F H P quæ prius secabant curvam, vertentur in Tangentes B T, H V; & rectæ A T G V semper sibi invicem æquales erunt, hoc est, portio Axis A T vel G V intercepta inter ordinatam & Tangentem quæ Subtangens dicitur, erit ubique constantis & datæ longitudinis quæ est præcipua Logarithmicæ Proprietas. Nam in

in diversis logarithmicis, subtangentes curvarum species seu formas determinabunt.

In duabus diversæ speciei logarithmicis, ejusdem numeri logarithmi, seu distantiæ ab unitate, erunt subtangentibus suarum curvatum proportionales. Sint enim curvæ HBD SNY, quarum subtangentes sint AT MX, sitque AB = MN = unitati, item DC = QY; erit AC logarithmus numeri CD, in logarithmica HD, ad MQ logarithmum numeri QY, seu ejusdem CD in logarithmica SY, ut subtangentes AT ad subtangentem MX. Concipiatur interseri inter AB CD vel MN QY, infinitos terminos continue proportionales, in ratione AB ad *ab* vel MN ad *mn*; & ob AB = MN erit *ab* = *mn*. item erit *bc* = *no*. Et termini proportionales cum in utraque figura sint numero æquales, divident lineas AC MQ in partes numero æquales, quarum primæ sint A*a* M*m*, partes itaque illæ erunt totis proportionales, hoc est erit A*a* : M*m* : : AC : MQ. Quoniam autem triangula TAB B*cb* sunt similia (nam pars curvæ B*b* coincidet fere cum portione tangentis) item triangula XMN, N*on* sunt similia. Erit A*a* vel B*c* : *bc* : : TA : AB

Fig. 4. & 5.

Item est *no* vel *bc* : N*o* : MN vel AB : MX.

Unde erit ex æquo, B*c* : N*o* : : TA : MX : : A*a* : M*m* : : AC : MQ. Q.E.D. Si AT vocetur *a*, ob AB : AT : : *bc* : B*c*; erit $Bc = \frac{a \times bc.}{AB}$

Hinc si detur logarithmus numeri, qui sit unitati proximus, vel illam minimo excessu superat, dabitur logarithmicæ subtangens, est enim excessus *bc* ad logarithmum B*c* ut AB unitas ad subtangentem AT. Vel etiam si sint duo quilibet numeri quam proxime æquales, erit differentia numerorum ad differentiam logarithmorum, ut alteruter numerorum ad subtangentem. v. gr. Si incrementum *bc* sit ,00000 00000 ,00001 02255 31945 60259, & B*c* vel *Aa* logarithmus numeri *qb* sit ,00000 00000 00000 44408 92098 50062. duobus his numeris & unitati inveniatur quartus proportionalis, scilicet

43429 44819 03251, is numerus dabit longitudinem subtangentis AT, quæ est subtangens logarithmicæ quæ exhibet logarithmos *Briggianos*.

Si Creditor Pecuniæ summam fœnori exponat, ea lege, ut singulis temporis momentis, pars proportionalis usuræ annuæ sorti annumeretur, ita scil. ut post finitum primum temporis momentum, seu exactum anni particulam indefinite exiguam, usuram poscat tempori proportionalem, quæ sorti adjecta, unà cum ipsa, usuram pariat, finito secundo temporis momento, sorti pariter accessuram, & ita deinceps. Quæritur quantum creditori finito anno debeatur? Sit a usura annua Unitatis, seu unius libræ. & si integer annus seu 1 dat usuram a, particula anni indefinite exigua Mm dabit usuram ipsi Mm proportionalem M$m \times a$; & proinde si Unitas per MN exponatur, ejus incrementum primum erit $no =$ M$m \times a$. Per puncta Nn concipiatur logarithmica describi, cujus Axis est OMQ. In hac curva, si portio Axis MQ tempus exponat, ordinata QY pecuniam repræsentabit quæ usque ad illud tempus, singulis momentis, proportionaliter crevit. Nam si capiantur ml &c. $=$ Mm, ordinatæ lp &c. erunt in serie continue proportionalium in ratione MN ad mn, id est crescent eadem ratione, qua pecunia crescit.

Tangat logarithmicam in N recta MX, ejus subtangens MX erit constans & invariabilis, & triangulum minimum Non simile erit triangulo XMN. At ostensum est, esse incerementum $no =$ M$m \times a =$ N$o \times a$ erit itaque no : No : : N$o \times a$: No : : a : 1. Sed ut no ad No, ita erit NM ad MX. Quare erit, ut a ad 1, ita NM seu 1 ad

MX $= \frac{1}{a}$ subtangenti.

Quod si Usura annua sit pars sortis vicesima, seu si sit

$a = \frac{1}{20} = ,05$, erit MX $= \frac{1}{a} = 20$.

Quia in diversis logarithmorum formis, ejusdem numeri logarithmi sunt subtangentibus suarum curvarum,

pro-

proportionales: si MQ tempus Annuum, seu unitatem, exponat; QY erit pecunia quæ finito anno debetur. Ut verò innotescat QY; Fiat ut MX seu 20 ad 0, 4342944 (qui numerus exponit subtangentem logarithmicæ, quæ exhibet logarithmos *Briggianos*) ita annus, sive unitas, ad logarithmum *Briggianum*, qui numero QY congruit; logarithmus autem ille invenietur 0. 0217147 cui respondens numerus $=$ QY est 1,05127, cujus incrementum supra unitatem sive sortem ,05127 pauxillum superat annuam usuram ,05. Adeo ut si usura annua centum librarum sit quinque libræ, usura proportionalis singulis anni momentis sorti 100 adjecta, pariet tantum ad finem anni,

lib. sol. d.
5 : 2 : $6\frac{1}{3}$

Si quæratur usura ejusmodi, ut singulis momentis pars ipsius sorti continue crescenti proportionalis, ad sortem accedat ea lege ut finito anno producat incrementum quod sit sortis pars quælibet data v. gr. vicesima. Fiat ut log. numeri 1, 05 ad 1, hoc est ut 0, 0211893 ad 1; ita subtangens 0, 4342944 ad $\frac{1}{a} = 20{,}49$, & erit $a = \frac{1}{20{,}49}$ $= {,}0488$. Nam si concipiatur pars usuræ ,0481 momento respondens, hoc est eandem habens rationem ad ,0488 quam habet momentum ad annum, & fiat ut unitas ad illam usuræ partem, ita sors ad ejus incrementum momentaneum; quæ hac ratione continuò crescit pecunia, ad finem anni augebitur vicesima sui parte.

CAPUT VI.

De Methodo qua Henricus Briggius *Logarithmos suos supputavit, ejusque Demonstratio.* *Vide Fig.* 4.

QUamvis *Briggius* lineam Logarithmicam nusquam descripsit, quem tamen in calculo adhibuit operandi modum, modique Rationem ex contemplatione Logarithmicæ

micæ evidentissime patebit. In qualibet Logarithmica HBD sint tres ordinatæ AB *ab* *qs* quam proxime æquales, hoc est earum differentiæ exiguam admodum ad ipsas lineas habeant rationem; Erunt Logarithmorum differentiæ differentiis linearum proportionales. Nam cum lineæ sunt quam proxime æquales, propinquissime sibi invicem erunt, & pars curvæ B*s* ab iis intercepta cum recta linea fere concidet, certe tam prope possunt ordinatæ sibi invicem admoveri, ut differentia curvæ, à recta ipsam subtendente, habeant ad ipsam subtensam, minorem qualibet datâ rationem. Triangula igitur B*c* *b* B*r* *s* pro rectilineis assumi possunt, & erunt æquiangula. Quare est *sr*:*bc*::B*r*:B*c*::A*q*:A*a*: hoc est excessus linearum supra minimam AB, erunt logarithmorum differentiis proportionales. Hinc patet ratio istius methodi qua tam numeri quam Logarithmi per differentias & partes proportionales corriguntur. Quod si AB sit unitas, erunt numerorum logarithmi differentiis numerorum proportionales.

Si intra numeros denarium & unitatem capiatur medius proportionalis, seu quod idem est, numeri denarii extrahatur Radix quadratica, Radix illa seu numerus in medio erit loco intra denarium & Unitatem. & ejus Logarithmus erit dimidius Logarithmi qui denario competit ac proinde dabitur. Si inter numerum prius inventum & unitatem, iterum inveniatur medius proportionalis quod fit extrahendo numeri inventi Radicem quadraticam, hic numerus Unitati duplo vicinior erit quam prior, ejusque logarithmus erit prioris logarithmi semissis, seu Logarithmi denario competentis pars quarta. Si hac ratione continuo extrahatur Radix quadratica & bisecentur Logarithmi, pervenietur tandem ad numerum cujus distantia ab unitate minor erit parte $\frac{1}{1\ 00000\ 00000\ 00000}$ istius logarithmi qui Denario tribuitur. *Briggius* peractis 54 Radicum extractionibus; Invenit numerum 1,00000 00000 00000 12781 91493 20032 3442 ejusque logarithmum fore 0,00000 00000 00000 05551 11512 31257 82702.

suppo-

supponatur Logarithmus hic æqualis A q sive B r, & sit $q\ s$ numerus radicum extractione inventus; erit differentia $r\ s$ qua unitatem superat = ,00000 00000 00000 12781 91493 20032 35.

Horum numerorum ope, logarithmi reliquorum omnium inveniri poterunt ad hunc modum. Inter datum numerum (cujus logarithmus inveniendus sit) & unitatem quærantur (ut superius ostensum est) medii proportionales, donec tandem inveniatur numerus tantillo unitatem superans ut unitas præcedat quindecim cyphras, quas totidem vel plures notæ significativæ sequantur. Sit numerus ille ab, & notæ significativæ, præfixis cyphris differentiam $b\ c$ denotabunt. Deinde fiat ut differentia $r\ s$ ad differentiam $b\ c$ ita B r Logarithmus datus ad B d vel A a Logarithmum numeri $a\ b$; qui itaque dabitur. Hic Logarithmus toties continue duplicatus quoties extractiones factæ sunt, tandem dabit Logarithmum numeri quæsiti. Hac etiam ratione Inveniri possit Subtangens Logarithmicæ nempe si fiat $r\ s$: B r : : A B seu unitas : A T subtangenti, quæ itaque invenietur 0, 43429 44819 03251, per quam denique reliquorum numerorum logarithmi innotescent, nempe si detur numerus quivis N M ejusque Logarithmus & quæratur alterius numeri logarithmus qui ad N M satis accedat, fiat ut N M ad subtangentem X M ita $n\ o$ differentia numerorum ad N o differentiam Logarithmorum. Quod si N M sit Unitas = A B dabuntur logarithmi multiplicando differentias minimas $b\ c$ per subtangentem constantem A T.

Fig. 5.

Hac ratione Invenientur Logarithmi numerorum 2 3 & 7, & inde dabuntur Logarithmi numerorum 4 8 16 32 64 &c. 9 27 81 243 &c. item 7 49 343 &c. Si à logarithmo denarii auferatur binarii Logarithmus restabit logarithmus Quinarii. & proinde dabuntur Logarithmi numerorum 25 125 625 &c.

Numeri ex his compositi, nempe 6 12 14 15 18 20 21 24 28 &c. facile logarithmus suis instruuntur, addendo logarithmos numerorum componentium.

At numerorum primorum logarithmos, per tot Radicum

cum extractiones Invenire, molestum admodum & laboriosum fuit opus. Nec quidem facile fuit, interpolando per differentias Primas, Secundas, & Tertias &c. Logarithmos supputare. Quo itaque absque tanta molestia Numerorum logarithmi obtineantur, Magni viri *Newtonus*, *Mercator*, *Gregorius*, *Wallisius*, & nuper *Halleius* series infinitas convergentes dederunt, quibus expeditius & certius logarithmi, ad quot volueris loca supputati haberi possunt; De hisce seriebus, eruditum Tractatum scripsit peritissimus Geometra *Halleius* inter Acta Philosophica Societatis Regiæ extantem, ubi series illas nova methodo demonstrat, modumque computandi logarithmos per eas docuit. Liceat hic subjungere novam seriem, ex qua expedite & facile fluunt Logarithmi saltem pro numeris majoribus.

Sit z numerus impar, cujus quæritur Logarithmus, Numeri $z-1$ $z+1$ erunt pares, & proinde dabuntur eorum logarithmi, & Logarithmorum differentia, quæ dicatur y; Quin etiam datur Logarithmus numeri qui est medius Geometricus inter numeros $z-1$ & $z+1$ æqualis scil. semisummæ logarithmorum. Series $y \times \frac{1}{4z} + \frac{1}{24z^3} + \frac{7}{360z^5} + \frac{181}{15120z^7} + \frac{13}{25200z^9}$ &c. erit æqualis logarithmo Rationis quam habet Geometricus medius inter numeros $z-1$ & $z+1$ ad Arithmeticum medium scil. numerum z.

Si Numerus superat 1000, Primus seriei terminus $\frac{y}{4z}$ sufficit ad producendum logarithmum ad tredecim vel quatuordecim notarum loca, secundus terminus dabit logarithmi loca viginti. At si z major sit quam 10000, primus terminus Logarithmum exhibet ad octodecim figurarum loca, & hinc ejus usus optimus erit, in supplendis logarithmis Chiliadum à *Briggio* prætermissis; Hujus rei capiamus exemplum, sit inveniendus logarithmus numeri 20001. Logarithmus numeri 20000 idem est ac logarithnus

mus binarii præfixo Indice 4. & differentia Logarithmorum 20000 & 20002, idem est ac differentia Logarithmorum pro numeris 1000 & 10001, scil. 0,00004 34272 7687. Hæc differentia si per 4 z seu 80004 dividatur

Quotiens $\frac{y}{4z}$ erit — — —	0, 00000 00005 42813
Huic quoto addatur log. numeri Geometrici medii, summa	4, 30105 17093 02416
	4, 30105 17098 45230

erit Logarithmus numeri 20001. Hinc patet, ut habeatur logarithmus ad quatuordecim loca non opus esse producere quotum ultra sex loca. At si logarithmus ad decem tantum figurarum loca habere velis, ut à *Vlacquo* in suis Tabulis factum est, duæ primæ quotientis notæ sufficiunt. Et si hac methodo computentur Logarithmi pro numeris supra 20000; labor omnis vix pluris erit, quam qui in exscribendis numeris impenditur. Hæc Series ex iis quæ ab *Halleio* inventæ sunt, facile sequitur, qui autem plura de iis scire cupit, Præfatum Tractatum adeat & discat.

FINIS.

Books Printed and Sold by Richard Clements *Bookseller in* Oxford.

1. A Preservative against Socinianism, shewing the direct and plain opposition between it and the Religion reveal'd by God in the Holy Scriptures. The first part, by Jonath. Edward D. D. late Principal of Jesus Coll. Oxon. in 4to. Price 6 pence.
2 The Second Part, by the same Author. 4to. Price Shill.
3 The Fourth Part, by the same Author. 4to. Price 1*s*. 6*d*.
4 An Index to the Four Parts of Dr. Edward's Preservative against Socinianism. 4to. Price 4*d*.
5 Remarks upon a Book lately publish'd by Dr. William Sherlock Dean of St. Paul's &c. entituled A modest Examination of the Oxford Decree, &c. by the same Author. 4to. Price 6*d*.
6 M. Tullius Cicero de Officiis, ad Marcum f. ex MSS. recensuit Tho. Cockman è Coll. Univ. A. B. Editio secunda 8vo. Price 3*s*.
7 M. Fabii Quinctiliani Declamationum Liber, cum ejusdem (ut nonnullis visum) dialogo de Causis Corruptæ Eloquentiæ, quæ omnia Notis illustrantur. 8vo. Price 3*s* 6*d*.
8 Xenophontis memorabilia Gr. Lat. cura Joannis Gilman. Price 4*s*. 6*d*.
9 Institutio Logicæ ad Communes Usus accommodata, per Joannem Wallis S. T. D. Geometriæ Professorem Savilianum, Oxoniæ Editio Quarta. 8vo. Price 3*s*.
10 St. Athanasius's four Orations against the Arians, and his Oration against the Gentiles. Translated from the Original by Mr. Samuel Parker, in two volumes. 8vo. Price 8*s*.
11 Euclidis Elementorum Libri priores Sex, item Undecimus & Duodecimus. Ex Versione Latina Frederici Commandini, Quibus accedunt Trigonometriæ Planæ & Sphæricæ Elementa: Item Tractatus de Natura & Arithmetica Logarithmorum. 8vo. Price 5*s*.
12 Antonii Walæi, S. T. P. Compendium Ethicæ Aristotelicæ ad normam Veritatis Christianæ revocatum. 8vo. Lond. 1708. Price 1*s*. 6*d*.
13 Aditus ad Logicam. In usum eorum qui primo Academiam salutant. Autore Samuele Smith, A. M. 12mo. Oxon. 1684. Price 1*s*. 6*d*.

14 Gram-

15 Grammatica Rationis sive Institutiones Logicæ. 12mo. Oxonii, è Theatro Sheldoniano. Price 2s.

16 Synopsis Metaphysica Andreæ Frommenii Editio ultima. Oxon. Price 2s. 6d.

17 Synopsis Communium Locorum, præcipue ad mores spectantium: ex poetis Latinis tum antiquioribus tum recentioribus collecta: & in capita cuique propria digesta. Editio tertia accuratius recognita & castigata. 12mo. Lond. 1719. Price 2s. 6d.

18 Græcæ Linguæ Dialecti. In usum Scholæ Westmonasteriensis, opera ac studio Mich. Maittaire A. M. Ædis Christi apud Oxonienses Alumn. 8vo. Lond. 1706. Price 4s.

19 Theodosii Sphæricorum libri tres, Græce & Latine. Cura Jos. Hunt è Coll. Ball. 8vo. Oxon. Price 4s. 6d.

20 Rogeri Aschami Epistolarum libri quatuor. Accessit Joannis Sturmii Aliorumque ad Aschamum, Anglosque alios eruditos Epistolarum liber unus. Editio novissima prioribus auctior. 8vo. Oxon. 1703. Price 3s. 6d.

21 Poems on several occasions, by Mr. Smith of Magdalen Coll. 8vo. Lond. 1713. Price 2s. 6d.

22 The Works of Ben. Johnson in 6 volumes, adorn'd with Cutts. 8vo. Lond. 1716. Price 18s.

23 New Experiments and Observations touching Cold, or an Experimental History of Cold, begun: to which are added an Examen of Antiperistasis, and an Examen of Mr. Hobbs's Doctrine about Cold. By the Honourable Robert Boyle Esq; 4to. Lond. 1683. Price 4s.

24 Manuductio ad Logicam, sive dialectica studiosæ juventuti ad Logicam præparandæ conscripta. A. R. P. Philippo du Trieu è Societate Jesu. Cui annectitur Tractatus brevis & dilucidus de Demonstratione accessit insuper Cl. Gassendi elegans Dissertatiuncula de Natura Demonstrationis, Annotationibus quibusdam illustrata. 8vo. Oxon. 1678. Price 1s.

25 Globe Notes by R. Holland. 8vo. Oxford 1701. Price 4d.

26 Caspari Bartholini. Thom. F. Specimen Philosophiæ Naturalis, præcipua physices Capita exponens, in gratiam Juventutis Academicæ. Accedit de Fontium Fluviorumque Origine, ex pluviis Dissertatio Physica. 12mo. Oxon. 1713. Price 1s. 6d.

27 Apostolici: or, the History of the Lives, Acts, Death, and Martyrdoms of those who were Contemporary with, or Immediately Succeeded the Apostles, as also the most eminent of the Primitive Fathers for the First Three Hundred Years: to which is added a Chronology of the Three First Ages of the Church. By William Cave D.D. The Fourth Edition. Folio. Lond. 1716. Price 1l. 5s.

28 The

28 The Genuine Works of St. Cyprian, Arch-Bishop of Carthage, and Primate of all Africa; together with his Life written by his own deacon Pontius. All done into English, from the Oxford Edition; and illustrated with diverse Notes. By Nath. Marshal LL. B. Fol. Lond. 1717. Price 1*l.* 1*s.*

29 Bibliotheca Biblica: being A Commentary upon all the books of the Old and New Testament. 4to. to be Continu'd. The price of each Number 6*d.*

30 Dissertationes Medico-Physicæ. De Antris Lethiferis. De montis Vesuvii Incendio. De stupendo Ossium Coalitu. De Immani Hypogastrii Sarcommate, A. D. Bernardo Connor M. D. Serenissimi Poloniæ Regis Medico. E Regia Cameræ Parisiensis Societate. Oxonii, è Theatro. 8vo. 1695. Price 1*s.* 6.

31 Logice Artis Compendium. Authore Roberto Sandersono Episc. Lincoln. 8vo. Oxonii. Price 1*s.* 6*d.*

32 The English Grammar: or an Essay on the Art of Grammar, applied to and exemplified in the English Tongue. By Michael Maittaire. 8vo. Lond. 1712. Price 2*s.* 6*d.*

33 The History of Greece. Vol. I. Containing the Space of about 1660 years; from the first Plantation of Greece to the Peloponnesian War. By Thomas Hind, M. A. of Lincoln Coll. Oxford. 8vo. Lond 1707. Price 3*s.* 6*d.*

